



Universidade Federal
do Rio de Janeiro

Escola Politécnica

APLICAÇÃO DE LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA DETERMINAÇÃO DE MOMENTOS HIPERESTÁTICOS DE PROTENSÃO

Carolina Barreto Saba

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Civil, da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientadores:

Ricardo Valeriano Alves

Mayra Soares Pereira Lima Perlingeiro

Rio de Janeiro

Março de 2018

APLICAÇÃO DE LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA DETERMINAÇÃO DE MOMENTOS
HIPERESTÁTICOS DE PROTENSÃO

Carolina Barreto Saba

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE
ENGENHARIA CIVIL DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO CIVIL.

Examinado por

Prof. Ricardo Valeriano Alves, D. Sc.

Prof^a. Mayra Soares Pereira Perlingeiro, D. Sc.

Prof. Benjamin Ernani Diaz, Dr. Eng.

Prof. Francisco Costa Reis, M. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2018

Saba, Carolina Barreto

Aplicação de Linhas de Influência para Determinação de Momentos Hiperestáticos de Protensão/ Carolina Barreto Saba. – Rio de Janeiro: UFRJ/ Escola Politécnica, 2018.

XVII, 129 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Ricardo Valeriano Alves, Mayra Soares Pereira Lima Perlingeiro

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia Civil, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 128 e 129

1. Pontes. 2. Concreto Protendido 3. Momentos Hiperestáticos de Protensão 4. Linha de Influência

I. Alves, Ricardo Valeriano et all II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia Civil. III. Aplicação de Linhas de Influência para Determinação de Momentos Hiperestáticos de Protensão.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus pais, André e Carla, pelo amor incondicional e pelo apoio durante toda a minha trajetória acadêmica, buscando sempre me oferecer as melhores oportunidades de ensino e me incentivando a perseguir meus sonhos. Essa conquista, sem dúvidas, é de vocês também. Obrigada, também, aos meus queridos irmãos, Bruna e Pedro, pelo carinho e parceria.

Um agradecimento especial ao meu namorado Maurício e aos meus amigos Tatyana e Guilherme, que sempre me ofereceram suporte nos momentos mais importantes e difíceis. Obrigada pela compreensão e por sempre acreditarem no meu potencial.

Agradeço a todos os amigos que conheci durante a faculdade, especialmente: Marjorie, Raoni, Marina, Gabriela e Samuel. Vocês tornaram incríveis estes anos de estudo, sem dúvidas, eles não teriam sido os mesmos sem a amizade de vocês.

Aos meus avós: Fábio, Isabel, Ana e Nahim e aos meus padrinhos Lílian e Fábio, obrigada pelo apoio e pelo carinho durante toda a minha vida.

Aos meus orientadores Ricardo e Mayra, agradeço pelos ensinamentos e empenho em me impulsionar a desenvolver este trabalho da melhor forma possível.

Agradeço também aos meus colegas de trabalho: Patrícia, João, Gustavo, William e ao meu coordenador Francisco, pelo incentivo para que eu desse sempre o melhor de mim e por nunca me permitirem desistir.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram ao longo da minha vida, de alguma forma, para que eu me tornasse a profissional que sou hoje.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Civil.

Aplicação de Linhas de Influência para Determinação de Momentos Hiperestáticos de Protensão

Carolina Barreto Saba

Março/ 2018

Orientadores: Ricardo Valeriano Alves e Mayra Soares Pereira Lima Perlingeiro

Curso: Engenharia Civil

No projeto de estruturas protendidas, típicas de pontes em vigas contínuas, a determinação dos momentos hiperestáticos de protensão assume fundamental importância. Na prática, projetistas contam com valores ou proporções baseadas na experiência, não sendo usual a utilização de métodos analíticos para a avaliação preliminar. Neste contexto, este trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de um método prático para determinação dos momentos hiperestáticos de vigas protendidas, capaz de fornecer um parâmetro inicial desta grandeza e auxiliar no pré-dimensionamento de tais estruturas. Este procedimento de cálculo se baseia no conceito de linhas de influência de momentos fletores devidos a um par de momentos unitários que se desloca ao longo da viga. Integrando-se o produto entre esta linha de influência e o diagrama de momentos isostáticos de protensão, determina-se o momento fletor hiperestático na seção referida. São deduzidas expressões analíticas para vigas protendidas de dois e três vãos, para alguns traçados típicos de cabos. A partir de ajustes de traçados com *splines* cúbicas são obtidos ábacos para a determinação do momento hiperestático em viga de dois ou três vãos. As expressões e os ábacos são validados em exemplos numéricos, comparando-se os resultados com métodos convencionais de análise de protensão. A precisão dos resultados é diretamente relacionada à proximidade do traçado com o ajuste adotado. Verifica-se a alta sensibilidade do momento hiperestático de protensão a variações sutis do traçado.

Palavras-chave: Pontes, Concreto Protendido, Momentos Hiperestáticos de Protensão, Linha de Influência.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI / UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

Application of Influence Lines to Determine Secondary Prestress Moments

Carolina Barreto Saba

March 2018

Advisors: Ricardo Valeriano Alves and Mayra Soares Pereira Lima Perlingeiro

Course: Civil Engineering

In prestressed concrete structures, regularly found in bridges and continuous beams, calculating secondary moments due to prestressing turns out to be fundamentally important. In the practice, designers make use of values based on experience, making uncommon the use of analytical methods for pre-evaluation. This work intends to develop a practical method to evaluate secondary moments in prestressed beams, providing initial parameters for this determination and helping the predesign of these structures. The mathematical procedure is based on the concept of influence lines for the secondary moments due to a moving unit moment pair. The secondary moment value of a given section is obtained integrating the product of the prestressing primary moment values with the influence line values along the beam length. Analytical expressions for prestressed two-span and three-span beams are determined for different cable profiles. Additionally, after a cubic spline interpolation of the primary moment values is determined, the secondary prestressing moment is calculated at an internal support of a two-span or three-span beam, for a direct and a practical evaluation. The mathematical analytical expressions for various cable profiles are applied in a few numerical examples, comparing the found explicit mathematical results with those obtained by usual structural analyses. The computational precision is directly proportional to the accuracy of the cable profile fitting. It is noticeable the high sensitivity of the prestressed secondary moment to small variations of the primary moment diagram.

Keywords: Bridges, Prestressed Concrete, Secondary Prestressing Moments, Influence Line.

Sumário

1. Introdução.....	1
2. Concreto protendido.....	3
2.1. Fundamentos do concreto protendido.....	3
2.2. Esforços gerados pela protensão.....	5
3. Métodos convencionais para análise da protensão	11
3.1. Método das Forças	11
3.2. Método da Carga Equivalente Convencional.....	14
3.3. Método de ALVES	17
4. Aplicação de linhas de influência para análise da protensão	20
4.1. Linha de influência de momentos fletores gerados por força unitária	21
4.2. Linha de influência de momentos fletores gerados por momento unitário	25
4.3. Linha de influência de momentos fletores gerados por par de momentos unitários.....	28
4.4. Determinação do momento hiperestático de protensão	30
5. Aplicações	33
5.1. Dois vãos protendidos com excentricidade constante.....	33
5.2. Dois vãos protendidos com traçado poligonal dos cabos.....	39
5.3. Dois vãos protendidos com traçado parabólico (método simplificado)	43
5.4. Três vãos protendidos com traçado parabólico (método simplificado)	48
5.5. Protensão com traçado aproximado por curva <i>spline</i>	56

5.5.1.	Aproximação de um traçado por <i>splines</i> cúbicas	56
5.5.2.	Expressão geral para o hiperestático de protensão	59
5.5.1.	Hiperestático de protensão em vigas de dois vãos	61
5.5.1.1.	Excentricidade máxima no meio do vão.....	61
5.5.1.2.	Excentricidade máxima no terço do vão	66
5.5.2.	Hiperestático de protensão em vigas de três vãos.....	71
5.5.2.1.	Excentricidade máxima no meio do vão.....	71
5.5.2.2.	Excentricidade máxima no terço do vão	77
6.	Exemplos numéricos	83
6.1.	Dois vãos protendidos (seção simétrica)	83
6.1.1.	Ajuste parabólico para o traçado	83
6.1.1.1.	Método da Carga Equivalente Convencional.....	83
6.1.1.2.	Análise pelo Método das Forças	86
6.1.1.3.	Análise por linha de influência.....	90
6.1.1.4.	Análise por linha de influência (método simplificado).....	91
6.1.2.	Ajuste em <i>spline</i> para o traçado.....	93
6.1.2.1.	Análise pelo Método de ALVES	93
6.1.2.2.	Análise por linha de influência.....	96
6.1.3.	Comparação de resultados	98
6.2.	Três vãos protendidos (seção simétrica)	99
6.2.1.	Ajuste parabólico para o traçado	100
6.2.1.1.	Método da Carga Equivalente Convencional.....	100

6.2.1.2.	Análise por linha de influência (método simplificado)	101
6.2.2.	Ajuste em <i>spline</i> para o traçado.....	103
6.2.2.1.	Análise pelo Método de ALVES	103
6.2.2.2.	Análise por linha de influência.....	106
6.2.3.	Comparação de resultados	109
6.3.	Dois vãos protendidos (seção assimétrica)	110
6.3.1.	Análise pelo Método de ALVES	110
6.3.2.	Análise por linha de influência	113
6.3.3.	Comparação de resultados	114
6.4.	Três vãos protendidos (seção assimétrica)	115
6.4.1.	Análise pelo Método de ALVES	115
6.4.2.	Análise por linha de influência	118
6.4.3.	Comparação de resultados	121
7.	Quadro resumo	122
8.	Conclusões e sugestões de continuidade.....	125
9.	Bibliografia.....	128

Lista de Figuras

Figura 2-1 – Ponte protendida executada em balanços sucessivos, na Itália. Fonte: (VERÍSSIMO e CÉSAR JR, 1998, p. 6).....	4
Figura 2-2 – Viga em concreto protendido com cordoalhas engraxadas. Fonte: (CARVALHO, 2012, p. 22).	5
Figura 2-3 - Convenções de sinais positivos para solicitações normais N , cisalhantes Q e de momentos fletores M	6
Figura 2-4 – Convenção adotada para sistema global de coordenadas.	6
Figura 2-5 – (a) Viga biapoiada protendida com peso próprio desprezado; (b) Viga biapoiada protendida sob ação de peso próprio e de um carregamento externo.	7
Figura 2-6 – (a) Seção de uma viga sob protensão de módulo P ; (b) Sistema equivalente de esforços gerados pela protensão.....	8
Figura 2-7 – Viga hiperestática protendida.	9
Figura 3-1 – Viga protendida de dois vãos.	11
Figura 3-2 – Sistema principal.	11
Figura 3-3 – Estado E_0	12
Figura 3-4– Estado E_1	12
Figura 3-5 – Diagrama de momentos fletores hiperestáticos $M_{hip}(x)$	13
Figura 3-6– Viga protendida de três vãos.....	13
Figura 3-7 – Solicitações devidas à protensão. Fonte: (PERLINGEIRO, 1998, p. 93)	14
Figura 3-8 – Traçado parabólico do cabo de protensão.....	15
Figura 3-9 – Carga equivalente de protensão em trecho de cabo parabólico. Fonte: (PERLINGEIRO, 1998, p. 95).	16
Figura 3-10 - Cargas de protensão em traçado genérico. Fonte: (PERLINGEIRO, 1998, p. 96).....	16

Figura 3-11 – Viga protendida subdividida em trechos.	17
Figura 3-12 – (a) Trecho da viga protendida; (b) Forças equivalentes de protensão. .	18
Figura 4-1– Viga para demonstração do método proposto.....	20
Figura 4-2 – Linha de influência $\eta_{MQ}(x)$ de momentos fletores na seção s.....	22
Figura 4-3 – Linha de influência de momentos fletores gerada por uma rotação unitária.	22
Figura 4-4 – Sistema estrutural para aplicação do PTV.....	22
Figura 4-5 – (a) Sistema de forças reais; (b) Sistema de deslocamentos virtuais infinitesimais compatíveis.....	23
Figura 4-6 – Linha de influência $\eta_{MC}(x)$ de momentos fletores na seção s.....	25
Figura 4-7 – Sistemas (a) e (b) para aplicação do Teorema da Reciprocidade.	26
Figura 4-8 - Linha de influência $\eta_{MP}(x)$ de momentos fletores na seção s.....	28
Figura 4-9 – Sistemas (a) e (b) para aplicação do Teorema da Reciprocidade.	29
Figura 4-10 – (a) Sistema estrutural correspondente à deformada $v_s(x)$; (b) Momentos fletores $m_s(x)$ gerados pela rotação unitária em s.	31
Figura 4-11 - (a) Sistema estrutural correspondente a m_{sx} ; (b) Momentos fletores m_{sx} gerados pela rotação θ_s na seção s.....	32
Figura 5-1 -Viga de dois vãos sob ação de protensão com excentricidade constante.	33
Figura 5-2 – (a) Sistema estrutural; (b) Diagrama de momentos fletores $m_B(x)$	34
Figura 5-3 – Sistema estrutural isostático AB.	34
Figura 5-4 – Diagrama de momentos fletores isostáticos de protensão $M_{iso}(x)$	37
Figura 5-5 – Diagrama de momentos fletores hiperestáticos de protensão $M_{hip}(x)$	38
Figura 5-6 – Diagrama de momentos fletores totais de protensão $M(x)$	38
Figura 5-7 – Viga protendida de dois vãos com traçado de variação poligonal.	39

Figura 5-8 - Diagrama de momentos fletores isostáticos de protensão $M_{iso}(x)$	41
Figura 5-9 – Diagrama de momentos fletores hiperestáticos de protensão $M_{hip}(x)$	41
Figura 5-10 – Diagrama de momentos fletores totais de protensão $M(x)$	42
Figura 5-11 – Diagrama de momentos fletores hiperestáticos de protensão. Adaptado de: (KONG, 2004).	42
Figura 5-12 – Viga protendida de dois vãos com traçado parabólico.	43
Figura 5-13 – (a) Comomente de variação linear do traçado do cabo de protensão $y_l(x)$; (b) Componente parabólica do traçado do cabo y_{px}	44
Figura 5-14 – Parcela parabólica do traçado do cabo no vão AB segundo referencial (u, v)	45
Figura 5-15 – (a) Diagrama de momentos fletores isostáticos de protensão $M_{iso}(x)$; (b) Parcela linear do diagrama $M_{iso}(x)$; (c) Parcela parabólica do diagrama $M_{iso}(x)$	46
Figura 5-16 – Diagrama de momentos fletores hiperestáticos de protensão M_{hipx}	47
Figura 5-17 – Diagrama de momentos fletores totais de protensão $M_{tot}(x)$	47
Figura 5-18 – Viga protendida de três com traçado parabólico.	48
Figura 5-19 – (a) Sistema estrutural após introdução da rótula fictícia e aplicação de um par de momentos unitários no apoio B; (b) Diagrama de momentos fletores $m_B(x)$	48
Figura 5-20 - Sistema estrutural hiperestático BCD.	49
Figura 5-21 – Sistema hipergeométrico para aplicação do Método dos Deslocamentos.	49
Figura 5-22 - Estado E0 para aplicação do Método dos Deslocamentos.	50
Figura 5-23 - Estado E1 para aplicação do Método dos Deslocamentos	50
Figura 5-24 – (a) Diagrama de momentos fletores isostáticos de protensão $M_{iso}(x)$; (b) Parcela linear do diagrama $M_{iso}(x)$; (c) Parcela parabólica do diagrama $M_{iso}(x)$	54
Figura 5-25 - Diagrama de momentos fletores hiperestáticos de protensão M_{hipx}	55

Figura 5-26 – Diagrama de momentos fletores totais de protensão $M_{tot}(x)$	55
Figura 5-27 – Viga sob protensão de traçado genérico.	56
Figura 5-28 – Divisão de uma curva genérica em trechos para aproximação por <i>spline</i>	56
Figura 5-29 – Parâmetros de um trecho de curva aproximado por <i>spline</i>	57
Figura 5-30 – Parâmetros dos trechos adjacentes i, j e k da <i>spline</i>	59
Figura 5-31 – Trecho da função mBx definido pelos seus valores inicial e final g_i e g_j .	60
Figura 5-32 – Viga protendida de dois vãos.	61
Figura 5-33 – Referenciais locais para a viga.	62
Figura 5-34 - Momento fletor hiperestático no apoio central de uma viga de dois vãos onde e_i ocorre no ponto médio de cada vão.....	66
Figura 5-35 - Viga protendida de dois vãos.	66
Figura 5-36 – Referenciais locais para a viga.	67
Figura 5-37 - Momento hiperestático no apoio central de uma viga de dois vãos onde e_i ocorre no terço de cada vão.....	70
Figura 5-38 - Viga protendida de três vãos.	71
Figura 5-39 – Referenciais locais para a viga.	71
Figura 5-40 - Momento fletor hiperestático no apoio interno de uma viga de três vãos onde e_i ocorre ao meio dos vãos externos.	75
Figura 5-41 - Momento hiperestático no apoio interno de uma viga protendida onde e_i ocorre ao meio dos vãos externos.	76
Figura 5-42 - Viga protendida de três vãos.	77
Figura 5-43– Referenciais locais para a viga.	77

Figura 5-44 – Momento fletor hiperestático no apoio interno de uma viga de três vãos onde ei ocorre no terço dos vãos externos.....	81
Figura 5-45 - Momento hiperestático no apoio interno de uma viga protendida onde ei ocorre no terço dos vãos externos.....	82
Figura 6-1 – Viga protendida de dois vãos.	83
Figura 6-2 – Trechos das cargas equivalentes de LIN.....	84
Figura 6-3 - Modelo estrutural - Ftool.	85
Figura 6-4 – Diagrama de momentos fletores totais de protensão (kN · m).....	85
Figura 6-5 - Estado E0.....	86
Figura 6-6 - Estado E1.....	87
Figura 6-7 – Trechos do ajuste parabólico do cabo de protensão.....	88
Figura 6-8 – Aproximação parabólica sem concordância entre parábolas.....	91
Figura 6-9 – Ajuste do traçado do cabo sem concordância no apoio central.....	93
Figura 6-10 – Trechos para ajuste do traçado do cabo em <i>splines</i>	93
Figura 6-11 - Modelo estrutural - Ftool.	95
Figura 6-12– Diagrama de momentos fletores totais de protensão (kN · m).....	96
Figura 6-13 – Momento fletor hiperestático no apoio B.....	97
Figura 6-14 – Sobreposição dos ajustes para o traçado (mesma escala horizontal e vertical).	98
Figura 6-15 – Sobreposição dos ajustes para o traçado (escala vertical majorada)....	99
Figura 6-16 – Exemplo numérico de viga com três vãos protendida.	99
Figura 6-17 – Trechos para aplicação das cargas equivalentes.....	100
Figura 6-18 - Modelo estrutural - Ftool.	100

Figura 6-19 – Diagrama de momentos fletores totais (kN · m).	101
Figura 6-20 - Aproximação do traçado do cabo sem concordância nos apoios centrais.	103
Figura 6-21 – Trechos para ajuste do traçado do cabo em <i>splines</i>	103
Figura 6-22 - Modelo estrutural - Ftool.	106
Figura 6-23 – Diagrama de momentos fletores totais (kN · m).	106
Figura 6-24 – Momento fletor hiperestático no apoio B.....	108
Figura 6-25 – Sobreposição dos ajustes para o traçado (mesma escala horizontal e vertical).	109
Figura 6-26 - Sobreposição dos ajustes para o traçado (escala vertical majorada)...	109
Figura 6-27 - Viga protendida de dois vãos.....	110
Figura 6-28- Modelo estrutural - Ftool.	112
Figura 6-29 – Diagrama de momentos fletores totais (kN · m).	112
Figura 6-30 – Momento fletor hiperestático no apoio B.....	114
Figura 6-31 – Trechos para ajuste do traçado do cabo em <i>splines</i>	115
Figura 6-32- Modelo estrutural - Ftool.	117
Figura 6-33– Diagrama de momentos fletores totais (kN · m).	118
Figura 6-34– Momento fletor hiperestático de protensão no apoio B.	120
Figura 7-1– Momento fletor hiperestático no apoio interno de uma viga protendida.	123
Figura 7-2– Momento fletor hiperestático no apoio interno de uma viga protendida.	124
Figura 8-1 – Viga protendida com variação de momento de inércia e greide em elevação. Fonte: (ALVES, 2017).	126
Figura 8-2 – Força ao longo do cabo de protensão, considerando protensão apenas à esquerda e protensão apenas à direita. Fonte: (CARVALHO, 2012, p. 135)	126

Figura 8-3 – Generalização do ponto de excentricidade máxima do traçado no vão externo..... 126

Lista de Quadros

Quadro 6-1 – Ajuste do traçado do cabo por <i>splines</i> cúbicas.....	94
Quadro 6-2 – Cargas equivalentes de protensão.....	95
Quadro 6-3 – Momento fletor hiperestático de protensão no apoio B.	97
Quadro 6-4 – Comparação de resultados obtidos para o momento hiperestático no apoio B.....	98
Quadro 6-5 – Ajuste do traçado do cabo por <i>splines</i> cúbicas.....	104
Quadro 6-6 – Cargas equivalentes de protensão.....	105
Quadro 6-7 – Momento fletor hiperestático de protensão no apoio B.	107
Quadro 6-8 – Comparação de resultados obtidos para o momento hiperestático no apoio B.....	109
Quadro 6-9 - Ajuste do traçado do cabo por <i>splines</i> cúbicas.....	111
Quadro 6-10 – Cargas equivalentes de protensão.....	111
Quadro 6-11 – Determinação do momento hiperestático de protensão no apoio B...	113
Quadro 6-12– Comparação de resultados obtidos para o momento hiperestático no apoio B.....	114
Quadro 6-13 - Ajuste do traçado do cabo por <i>splines</i> cúbicas.....	116
Quadro 6-14 - Cargas equivalentes de protensão.	117
Quadro 6-15 - Momento fletor hiperestático de protensão no apoio B.	119
Quadro 6-16– Comparação de resultados obtidos para o momento hiperestático no apoio B.....	121

1. Introdução

No projeto de estruturas protendidas, típicas de pontes em vigas contínuas, a determinação do chamado “hiperestático de protensão” assume fundamental importância. Na prática, projetistas utilizam usualmente valores ou proporções baseadas na experiência, sendo incomum o emprego de métodos analíticos para a avaliação preliminar.

Em estruturas bem-comportadas, esses valores pré-definidos podem conduzir a bons resultados no pré-dimensionamento da protensão. Entretanto, em estruturas mais complexas, observa-se que a alteração no traçado resulta em uma variação nos valores do hiperestático de protensão.

Neste contexto, este trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de um método prático para a determinação dos momentos fletores hiperestáticos de vigas protendidas. Busca-se um procedimento de cálculo capaz de fornecer um parâmetro inicial desta grandeza para auxiliar no pré-dimensionamento de tais estruturas. Para isso, faz-se uma revisão na literatura relativa ao cálculo de hiperestático e, fundamentalmente, do hiperestático de protensão.

O presente trabalho foi dividido em sete capítulos, cujos os conteúdos são apresentados a seguir.

O Capítulo 2 apresenta os fundamentos do concreto protendido.

O Capítulo 3 descreve os três métodos clássicos e usuais para a determinação de momentos hiperestáticos de protensão: Método das Forças; Método da Carga Equivalente Convencional e Método de Alves. Ressaltam-se suas vantagens e desvantagens, bem como as situações em que sua aplicação é adequada.

O Capítulo 4 apresenta o conceito de linhas de influência de protensão, no qual se fundamenta o método de cálculo em estudo neste trabalho. Seu princípio é a integração do produto entre esta linha de influência com o diagrama de momentos isostáticos de protensão, obtendo-se, assim, o valor do momento hiperestático em um apoio interno da estrutura. A partir deste resultado, determina-se facilmente o diagrama de momentos hiperestáticos.

No Capítulo 5, aplica-se o procedimento de cálculo proposto para as vigas de dois e de três vãos sob protensão com traçados diversos, deduzindo-se as expressões analíticas para a determinação do hiperestático de protensão em cada caso. A partir das expressões obtidas pela aproximação do traçado do cabo de protensão por *splines* cúbicas, desenvolvem-se ábacos para determinação prática de momentos hiperestáticos de protensão em vigas de dois e três vãos.

Em seguida, no Capítulo 6 desenvolvem-se exemplos numéricos de aplicação do método de cálculo apresentado, bem como as comparações entre os resultados obtidos com os dos métodos usuais.

O Capítulo 8 apresenta as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

2. Concreto protendido

2.1. Fundamentos do concreto protendido

O surgimento do concreto armado teve origem na França, em meados do século XIX, após a criação do cimento Portland na Inglaterra. No decorrer deste século, diversas técnicas foram desenvolvidas em países europeus a fim de se aprimorar o desempenho do concreto, inclusive a ideia de se utilizar barras de aço, com objetivo de reforçar os elementos estruturais. Com a prática, constatou-se a necessidade de armadura apenas nas faces tracionadas das peças.

Desenvolveu-se, assim, o conceito de concreto armado, uma composição estrutural que combina a elevada resistência à compressão do concreto com a excelente capacidade do aço em absorver esforços de tração. Desta forma, contorna-se a baixíssima resistência à tração do concreto. Quando o elemento estrutural está submetido a este tipo de esforço, resiste à ruptura por meio de sua armadura de aço. Esta armadura é, portanto, do tipo passiva, pois passa a “trabalhar” apenas quando solicitada por sua deformação.

A ideia de protender o concreto surgiu em 1886 nos EUA, sugerida por P. H. Jackson. Entretanto, os conceitos fundamentais para o êxito de estruturas protendidas de concreto foram estabelecidos apenas em 1928 por Eugène Freyssinet, que apresentou o primeiro trabalho consistente sobre o assunto, patenteando um sistema de protensão eficiente.

Como descreve PFEIL (1984), a protensão pode ser definida como o artifício de se introduzir, em uma estrutura, um estado prévio de tensões, a fim de se melhorar a sua resistência ou seu comportamento sob ação de determinadas solicitações. O princípio é a imposição de tensões de compressão nas zonas tracionadas pelo carregamento atuante “de tal modo que os esforços de tração tenham, em primeiro lugar, de anular estas tensões de compressão antes que surjam tensões de tração no concreto” (LEONHARDT, 1983, p. 3).

Define-se, portanto, a protensão como uma armadura do tipo ativa, isto é, que atua sobre a estrutura independente da imposição de carregamentos externos. Isto ocorre porque o aço da armadura (que deve ser de alta resistência) é distendido por elementos (macacos de protensão) que os impõem um estado prévio de tensões. Os

cabos de protensão tracionados, por sua vez, transmitem ao concreto esforços de compressão.

A imposição destas tensões ao elemento estrutural, visando otimizar seu comportamento sob o carregamento atuante, permite um maior aproveitamento do potencial do concreto à compressão (se comparado ao concreto armado) e, simultaneamente, minimiza ou mesmo inibir o surgimento das fissuras geradas por tração.

Como descrevem VERÍSSIMO e CÉSAR JR (1998), a protensão possibilita o projeto de seções mais esbeltas em comparação ao concreto armado convencional, de forma que as estruturas de concreto protendido costumam apresentar menor peso próprio, sendo adequadas e economicamente viáveis para projetos de grandes vãos. Outra vantagem da utilização de peças protendidas é a limitação das deformações (flechas) a valores muito inferiores ao que se teriam em estruturas de concreto armado. Têm-se, ainda, maior resistência à fadiga e maior durabilidade da peça protendida, sendo este último aspecto diretamente relacionado à minimização ou eliminação do surgimento de fissuras.

Em contrapartida, a protensão demanda um controle de execução mais minucioso da estrutura de concreto, uma vez que os cabos de protensão devem ser protegidos de forma adequada contra a corrosão e sua montagem no elemento estrutural deve ser realizada de forma precisa, a fim de ser respeitar o traçado previsto em projeto.

As Figura 2-1 ilustra a construção de uma ponte protendida executada em balanços sucessivos na Itália.

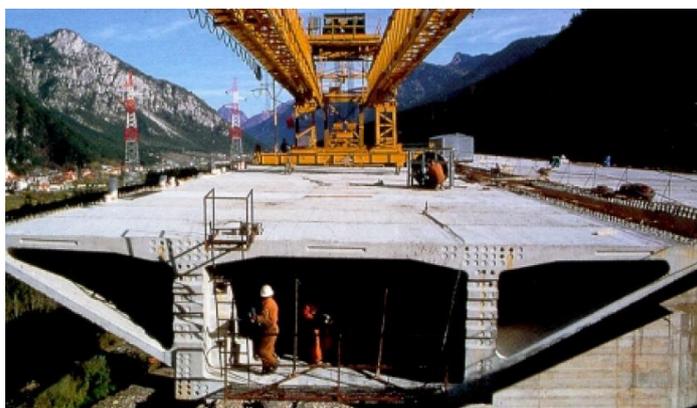


Figura 2-1 – Ponte protendida executada em balanços sucessivos, na Itália. Fonte: (VERÍSSIMO e CÉSAR JR, 1998, p. 6).

2.2. Esforços gerados pela protensão

Em uma estrutura protendida, a tração atuante no cabo de protensão imprime esforços de compressão no concreto, seja por meio da ancoragem direta de fios ou cordoalhas (pré-tensão) ou por meio da ancoragem dos cabos em regiões internas e externas da estrutura (pós tensão ou protensão externa). A Figura 2-2 ilustra uma viga sob protensão não aderente, realizada por cabos compostos por cordoalhas engraxadas envoltas com capa protetora de polietileno de alta densidade (PEAD).

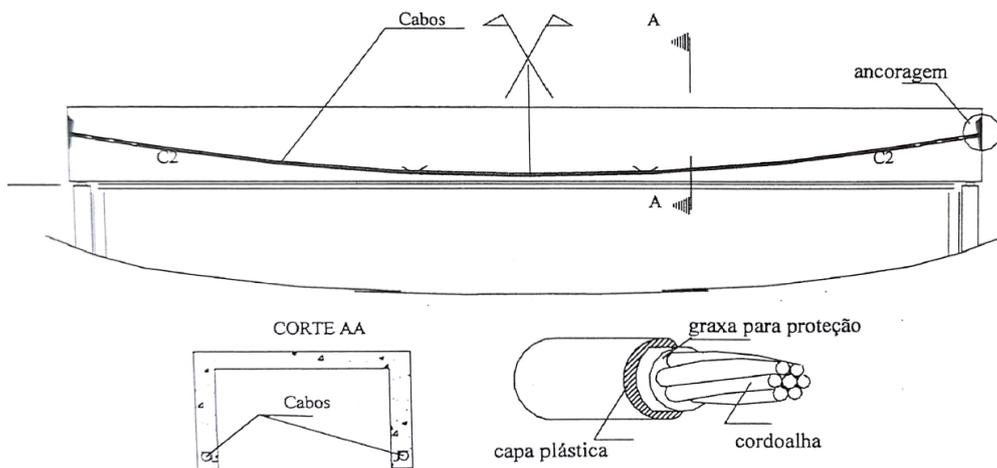


Figura 2-2 – Viga em concreto protendido com cordoalhas engraxadas. Fonte: (CARVALHO, 2012, p. 22).

As tensões impostas ao concreto devidas à força de protensão são variáveis ao longo de uma seção de cálculo. Este efeito é gerado pela excentricidade que o cabo possui em relação ao eixo que passa pelo centroide da viga, resultando no surgimento do momento fletor de protensão. Adiciona-se o efeito do momento associado a esta carga às tensões de compressão advindas da força normal na seção. Este conceito é expresso na equação (2-1) para a determinação da tensão normal σ_p , gerada pela protensão ao longo de uma seção de cálculo:

$$\sigma_p = \frac{N}{A} \pm \frac{My}{I} \quad (2-1)$$

onde:

N é a componente normal da força de protensão de módulo P ;

A é a área da seção de cálculo;

M é o momento fletor gerado pela protensão;

I é o momento de inércia da seção;

y é a ordenada da fibra de cálculo.

Ilustra-se na Figura 2-3 a convenção de sinais para as solicitações internas adotada neste trabalho. Como usual em projetos de estruturas protendidas, a solicitação normal é positiva quando há compressão.

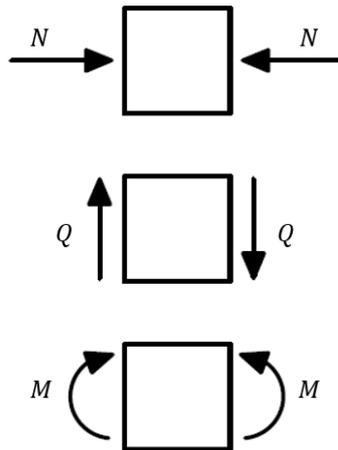


Figura 2-3 - Convenções de sinais positivos para solicitações normais N , cisalhantes Q e de momentos fletores M .

O sistema global de coordenadas adotado neste trabalho está representado na Figura 2-4.



Figura 2-4 – Convenção adotada para sistema global de coordenadas.

Na Figura 2-5a, ilustra-se uma viga biapoiada protendida cujo peso próprio é desprezado. Ao lado, o diagrama de tensões devidas à protensão para uma seção localizada no meio do vão. Na Figura 2-5b, combina-se o estado de tensões gerado pela protensão de módulo P (Figura 2-5a) ao estado de tensões gerado pelo peso próprio g e por um carregamento externo qualquer q . A tensão resultante no concreto, σ_c , pode ser exclusivamente de compressão (neste caso, diz-se que ocorre protensão total) ou

pode apresentar valores de tração de pequena magnitude. Neste segundo caso, quando as tensões de tração que surgem são inferiores à resistência à tração do concreto, diz-se que a protensão é limitada, caso contrário, tem-se uma protensão parcial.

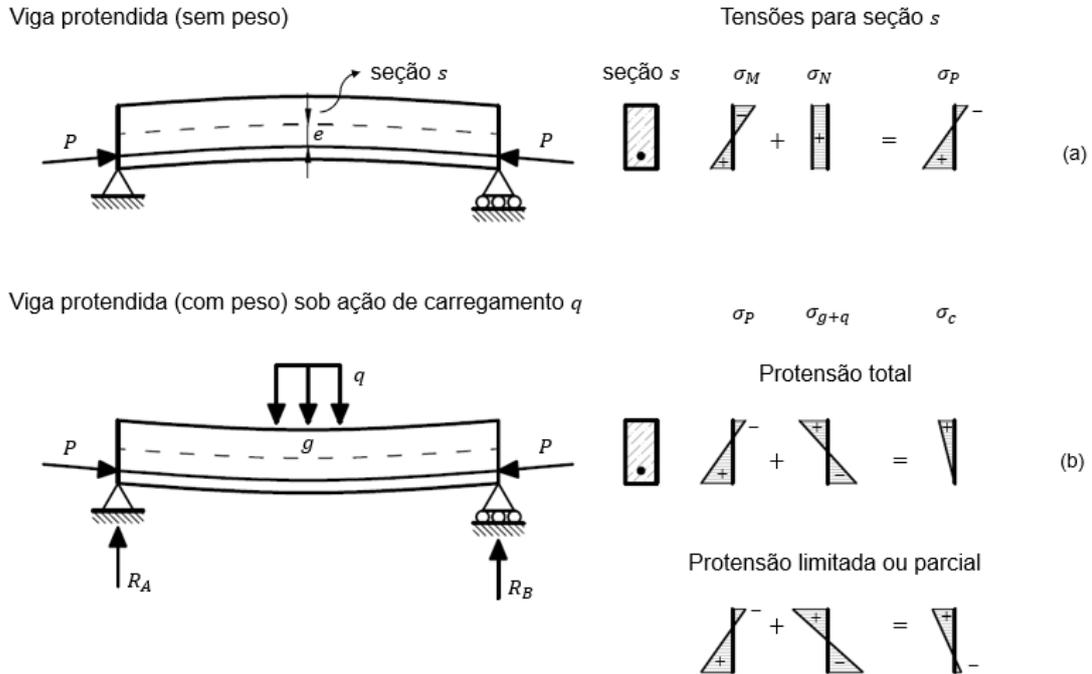


Figura 2-5 – (a) Viga biapoiada protendida com peso próprio desprezado; (b) Viga biapoiada protendida sob ação de peso próprio e de um carregamento externo.

A Figura 2-5 ilustra um traçado de cabo de protensão com excentricidade constante, para fins demonstrativos. Na prática, adota-se um traçado com excentricidade variável ao longo da viga, de forma a gerar momentos fletores contrários aos devidos ao carregamento atuante.

Importante ressaltar que a protensão é um sistema autoequilibrado, isto é, em estruturas isostáticas, não gera reações de apoio, somente solicitações internas (Figura 2-5a). Para estruturas hiperestáticas, contudo, seu efeito é representado por uma parcela isostática de esforços - que são obtidos de forma direta a partir do traçado do cabo ao longo da viga - e por solicitações hiperestáticas, cuja determinação é mais trabalhosa.

Os esforços isostáticos de protensão podem ser determinados pela simples aplicação da força de protensão P em uma seção de cálculo da viga. Sendo α o ângulo entre a tangente ao traçado do cabo e a horizontal, e sendo e a excentricidade do cabo na seção em questão, tem-se o esquema de forças da Figura 2-6.

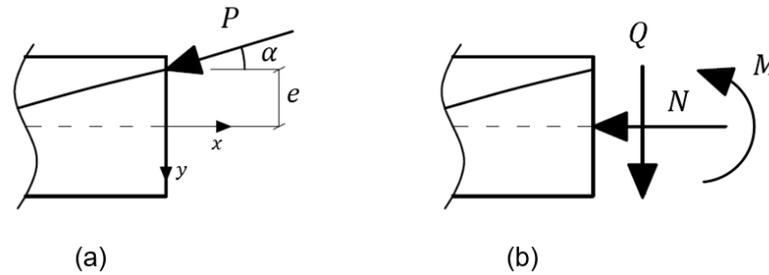


Figura 2-6 – (a) Seção de uma viga sob protensão de módulo P ; (b) Sistema equivalente de esforços gerados pela protensão.

Podem-se obter, assim, a sollicitação cortante Q , a sollicitação normal N e o momento fletor M :

$$Q = P \cdot \text{sen}(\alpha) \quad (2-2)$$

$$N = P \cdot \text{cos}(\alpha) \quad (2-3)$$

$$M = -P \cdot \text{cos}(\alpha) \cdot e \quad (2-4)$$

A equação (2-4) demonstra que o momento fletor gerado pela protensão é definido pelos parâmetros P , α e e . Observa-se que o ângulo de inclinação dos cabos, em geral, é de pequena magnitude, o que implica $\text{cos}(\alpha) \cong 1$. Neste caso, as Equações (2-3) e (2-4) podem ser aproximadas por:

$$N = P \quad (2-5)$$

$$M = -P \cdot e \quad (2-6)$$

Observa-se, na equação (2-5), que o momento fletor isostático gerado pela protensão com traçado de pequena variação angular é função apenas de P e e , o que resulta em um diagrama de momentos fletores isostáticos com o mesmo aspecto que o traçado do cabo.

Para uma estrutura isostática, estes são os únicos esforços gerados pela protensão. Contudo, para a grande maioria das estruturas, que são hiperestáticas, a restrição de deslocamento resulta no surgimento de esforços hiperestáticos de protensão (Figura 2-7). Neste aspecto, pode-se estabelecer uma analogia com o efeito de temperatura em estruturas isostáticas e hiperestáticas.

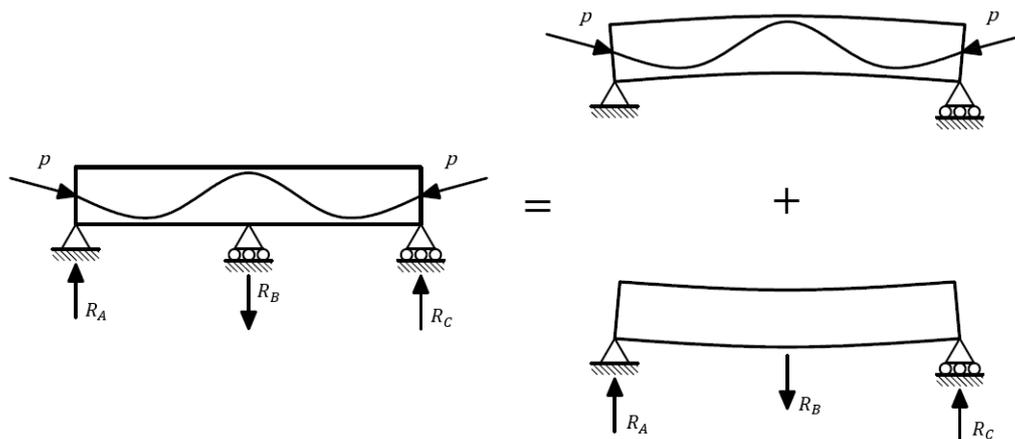


Figura 2-7 – Viga hiperestática protendida.

A Figura 2-7 mostra uma estrutura hiperestática protendida representada pela superposição de um sistema isostático protendido com um sistema sob o efeito dos esforços hiperestáticos gerados pela protensão. Este conceito remete diretamente ao Método das Forças para a análise de estruturas hiperestáticas, como se descreve mais detalhadamente no Capítulo 3 deste trabalho.

Pode-se dividir, assim, o momento fletor total gerado pela protensão, $M_{tot}(x)$, em duas parcelas:

$$M_{tot}(x) = M_{iso}(x) + M_{hip}(x) \quad (2-7)$$

onde $M_{iso}(x)$ é o momento isostático de protensão, obtido pela equação (2-4) e $M_{hip}(x)$ é o momento hiperestático gerado pela protensão.

Os métodos mais difundidos para traçar o diagrama de momentos fletores de protensão fazem uso do conceito de carga equivalente, o que consiste na substituição dos cabos de protensão por um carregamento externo cujo diagrama de momentos fletores seja similar ao diagrama final da protensão. Apesar de simples conceitualmente, tais métodos costumam ser trabalhosos e difíceis de serem automatizados, uma vez que qualquer alteração no traçado do cabo demanda o ajuste das cargas equivalentes aplicadas no modelo estrutural. Alguns destes métodos são descritos no Capítulo 3 deste trabalho.

Após a obtenção dos diagramas de momentos fletores isostáticos e hiperestáticos resultantes da ação da protensão, é preciso verificar, para as diversas etapas do processo construtivo, as tensões atuantes no concreto para as seções principais da viga. A partir destes resultados, ajusta-se o traçado do cabo para atender

aos critérios normativos, de forma mais otimizada e econômica possível. Esse processo normalmente é iterativo, uma vez que só é possível determinar o efeito gerado pela protensão na viga a partir de um conhecimento prévio de seu traçado.

Neste contexto, o presente trabalho busca descrever um método prático que possa ser automatizado se determinar os momentos hiperestáticos de protensão, de forma a auxiliar no pré-dimensionamento da viga protendida. Desenvolvem-se expressões para obtenção de um parâmetro inicial para o hiperestático, permitindo-se o ajuste do traçado de forma mais acertiva. Consequentemente tem-se um traçado mais refinado, próximo ao traçado final. Em seguida, prossegue-se com a análise utilizando-se os métodos usuais de carga equivalente, a fim de se confirmar os resultados esperados.

3. Métodos convencionais para análise da protensão

Este capítulo apresenta três métodos para análise de estruturas de concreto protendidas: Método das Forças; Método da Carga Equivalente Convencional e Método de Alves. Ressaltam-se suas vantagens e desvantagens, bem como as situações em que sua aplicação é adequada.

3.1. Método das Forças

Para a demonstração deste método de cálculo, adota-se na Figura 3-1 o mesmo sistema estrutural ilustrado na Figura 2-7. Como descrito no item 2.2, os esforços de protensão de uma viga hiperestática podem ser obtidos pela eliminação fictícia de seu apoio redundante, seguida pela superposição de dois sistemas: o primeiro com ação da protensão e o segundo sob a ação da força hiperestática eliminada, aplicada como carga externa. Este é o conceito que define o Método das Forças (ou Método da Flexibilidade) para análise de estruturas hiperestáticas.

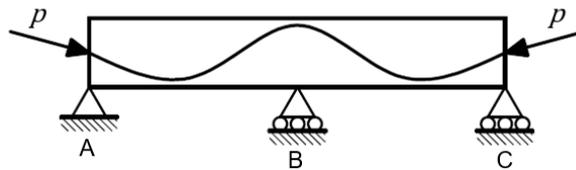


Figura 3-1 – Viga protendida de dois vãos.

Como descrito por TIMOSHENKO e GERE (1984), primeiramente, define-se o sistema principal (SP) a partir da liberação das reações redundantes da estrutura, constituindo-se, assim um sistema estaticamente determinado. Como o exemplo desta demonstração, ilustrado na Figura 3-1, apresenta apenas um grau de hiperestaticidade, basta eliminar de um apoio da estrutura, como ilustrado na Figura 3-2.

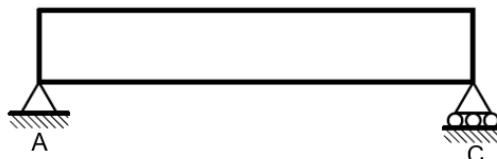


Figura 3-2 – Sistema principal.

O estado E_0 constitui-se, então, do sistema principal sob a ação da protensão (Figura 3-3).

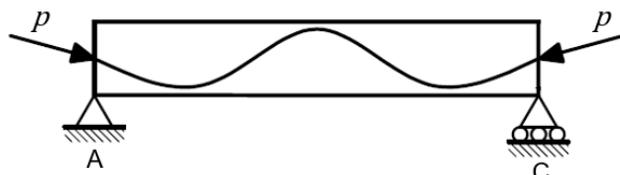


Figura 3-3 – Estado E_0 .

O estado E_1 é representado pelo SP sob a ação de uma carga unitária na direção do deslocamento liberado da estrutura, isto é, uma força unitária no apoio B , como ilustrado na Figura 3-4.

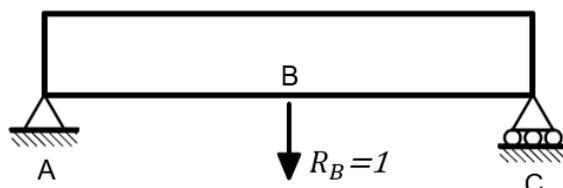


Figura 3-4– Estado E_1 .

Como o deslocamento vertical no apoio B da estrutura é nulo, tem-se a seguinte equação de compatibilidade para este nó:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot R_1 = 0 \quad (3-1)$$

onde:

R_1 é a reação desconhecida no apoio liberado da estrutura;

δ_{10} é o deslocamento do ponto cujo apoio foi liberado, gerado pela ação do carregamento que atua na estrutura (estado E_0);

δ_{11} é o coeficiente de flexibilidade associado ao hiperestático liberado R_1 , isto é, o deslocamento deste ponto gerado pela ação de uma carga unitária (estado E_1);

Pode-se, assim, determinar a reação hiperestática no apoio B :

$$R_B = R_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad (3-2)$$

Os deslocamentos δ_{10} e δ_{11} da equação (3-2) são determinados pelo Método da Carga Unitária (MCU). Para isso, é necessário se conhecer o traçado final do cabo de protensão, que deve ser descrito por trechos de polinômios (ou parábolas). Solucionadas as integrais do MCU que definem δ_{10} e δ_{11} , obtém-se a reação hiperestática. Aplicando-se a reação obtida R_B no sistema principal (Figura 3-2), obtém-se o diagrama de momentos fletores hiperestáticos da estrutura (Figura 3-5).

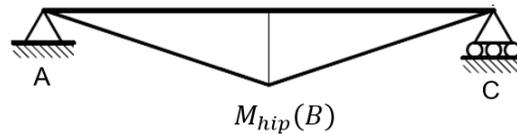


Figura 3-5 – Diagrama de momentos fletores hiperestáticos $M_{hip}(x)$.

Observa-se que o emprego deste método é simples para o exemplo estudado. Contudo, para uma estrutura de grau de hiperestaticidade mais elevado, tem-se não apenas uma equação, mas um sistema de equações de compatibilidade. Para a estrutura de três vãos ilustrada na Figura 3-6, por exemplo, que apresenta dois graus de hiperestaticidade, suas equações de compatibilidade resultam no sistema linear composto por (3-3) e (3-4). Podem-se adotar como redundantes as reações verticais nos apoios internos B e C, por exemplo.

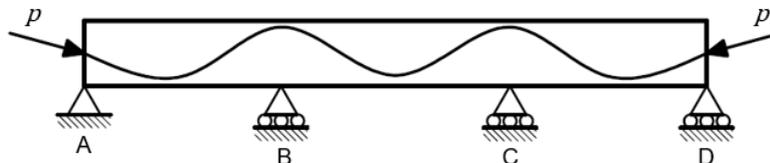


Figura 3-6– Viga protendida de três vãos.

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot R_1 + \delta_{12} \cdot R_2 = 0 \quad (3-3)$$

$$\delta_{20} + \delta_{21} \cdot R_1 + \delta_{22} \cdot R_2 = 0 \quad (3-4)$$

Aplica-se o método da Carga Unitária para determinação de cada um dos coeficientes das equações de compatibilidade e, em seguida, soluciona-se o sistema, obtendo-se as reações hiperestáticas R_1 e R_2 . A partir dos valores obtidos para as reações da estrutura, o diagrama de momentos fletores hiperestáticos da estrutura é facilmente determinado.

3.2. Método da Carga Equivalente Convencional

O método descrito por LIN (1980) para a determinação dos momentos fletores de protensão consiste em transformar os efeitos de protensão em um cabo parabólico em cargas verticais. Para a demonstração deste conceito, supõe-se uma viga biapoiada (Figura 3-7), cuja protensão de traçado parabólico equilibra os momentos fletores advindos do carregamento externo aplicado.

Conforme descrito por PERLINGEIRO (1998), o método propõe que a força longitudinal de atrito f_{la} e a força transversal de curvatura f_{tc} sejam substituídas por cargas verticais uniformemente distribuídas.

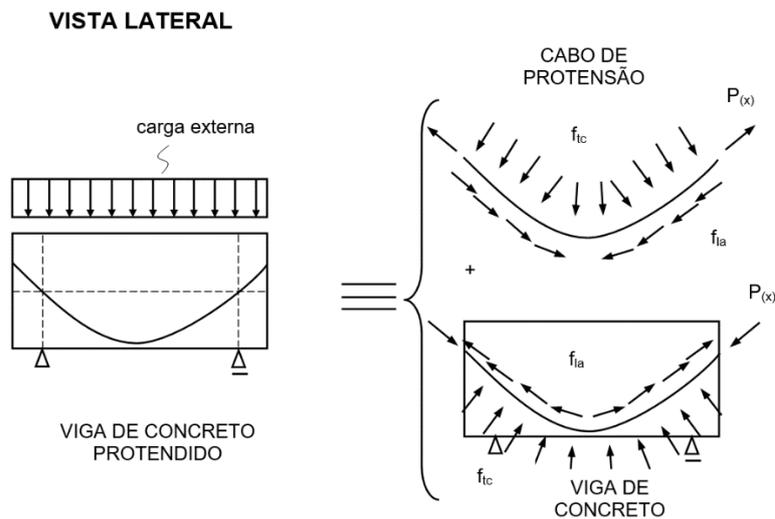


Figura 3-7 – Solicitações devidas à protensão. Fonte: (PERLINGEIRO, 1998, p. 93)

Considera-se um sistema referencial local com origem no eixo de simetria da parábola (Figura 3-8), cuja equação geral é escrita por:

$$y(x) = ax^2 + bx + c \quad (3-5)$$

As condições de contorno para determinação das constantes a, b e c são: $(-L/2, f)$, $(0,0)$ e $(L/2, f)$, sendo f a flecha do arco de parábola e L o seu comprimento. Aplicando-se tais condições de contorno à equação geral da parábola, obtêm-se:

$$a = \frac{4f}{L^2} \quad (3-6)$$

$$b = c = 0 \quad (3-7)$$

O que implica em:

$$y(x) = \frac{4f}{L^2} x^2 \quad (3-8)$$

Derivando-se a equação (3-8), obtém-se a expressão para o ângulo de inclinação do cabo, α , na extremidade do elemento:

$$\alpha(x) = \text{arctg} \left(\frac{8f}{L^2} x \right) \cong \frac{8f}{L^2} x \quad (3-9)$$

$$\alpha(L/2) = \frac{4f}{L} \quad (3-10)$$

Ressalta-se que, para ângulos α de pequena magnitude, é válida a aproximação de sua tangente como o valor do próprio ângulo. Entretanto, para ângulos que não se classifiquem neste caso, esta aproximação não deve ser utilizada, pois isto pode provocar erros significativos no comprimento L da parábola.

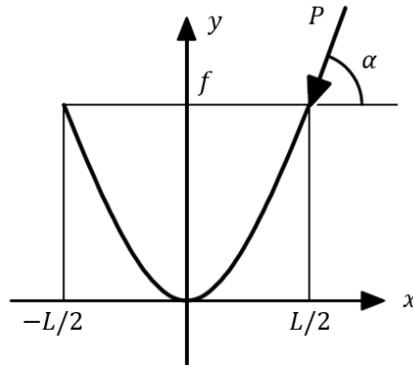


Figura 3-8 – Traçado parabólico do cabo de protensão.

Considerando-se as expressões (2-2) e (2-3), podem-se determinar as projeções das solicitações de protensão, N e Q :

$$N = P \cdot \cos(\alpha) \cong P \quad (3-11)$$

$$Q = P \cdot \text{sen}(\alpha) \cong \frac{4P \cdot f}{L} \quad (3-12)$$

A carga vertical q uniformemente distribuída, ilustrada na Figura 3-9, capaz de equilibrar o efeito de Q sob o elemento é dada por:

$$q = \frac{1}{L} \left(2 \cdot \frac{4f \cdot P}{L} \right) = \frac{8P \cdot f}{L^2} \quad (3-13)$$

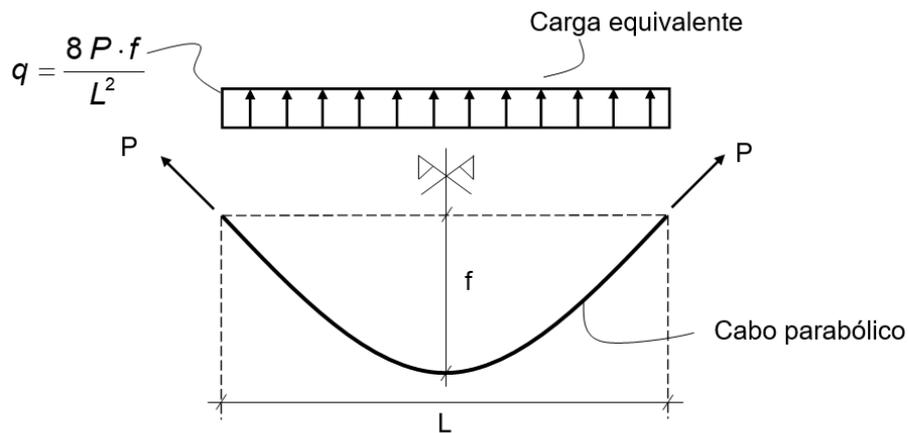


Figura 3-9 – Carga equivalente de protensão em trecho de cabo parabólico. Fonte: (PERLINGEIRO, 1998, p. 95).

Tem-se, portanto, em (3-13) a expressão para obtenção da carga equivalente de protensão para um cabo de traçado em parábola simétrica. Como, na prática, não é usual a adoção de traçados simétricos, o que se faz é aproximar o traçado real em trechos de semi-parábolas, como ilustrado na Figura 3-10. É preciso, para isso, identificar os pontos de tangente nula e de inflexão das parábolas, onde costumam ocorrer os limites dos trechos de cargas equivalententes.

Segundo PERLINGEIRO (1998), determina-se, então a carga equivalente q para cada semi-parábola, conforme ilustrado na Figura 3-10, desprezando-se o carregamento correspondente à parte simétrica da parábola (tracejado).

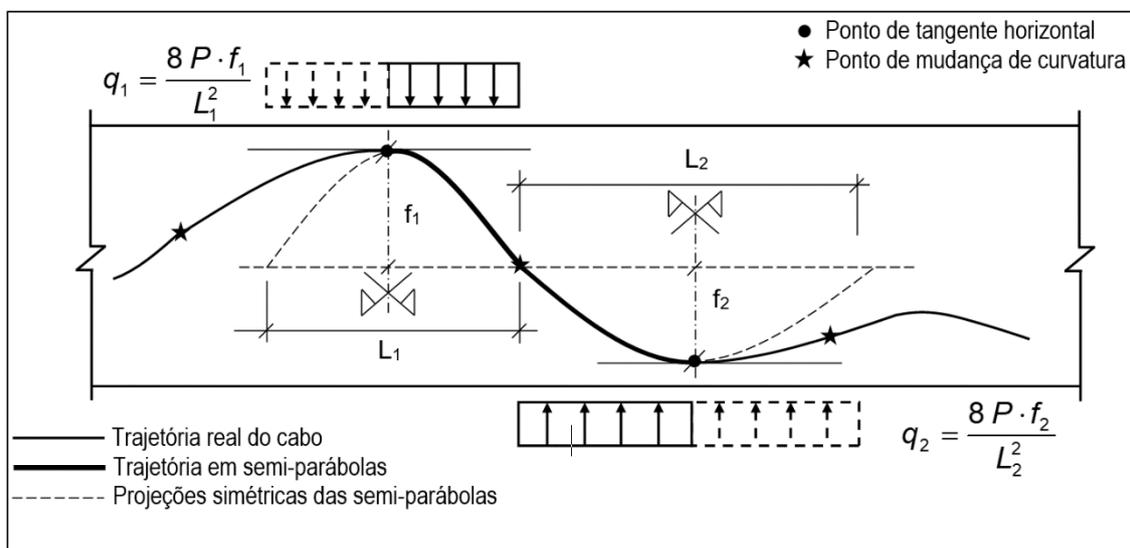


Figura 3-10 - Cargas de protensão em traçado genérico. Fonte: (PERLINGEIRO, 1998, p. 96).

Aplicando-se cada carga equivalente obtida em seu respectivo trecho da viga, é possível obter um sistema estrutural cujos esforços são similares aos produzidos pela protensão. Uma vez que os momentos fletores do sistema equivalente são os momentos totais de protensão e os momentos isostáticos são conhecidos, o momento hiperestático pode ser obtido de forma simples por (2-7).

Este método de cálculo, apesar de apresentar bons resultados, pode se mostrar trabalhoso, uma vez que as cargas equivalentes devem ser autoequilibradas, o que torna sua obtenção e a determinação de seus trechos de aplicação um processo sensível e difícil de ser automatizado.

3.3. Método de ALVES

O procedimento de cálculo aqui descrito é, também, um método de carga equivalente. Contudo, como não se adota a suposição de um traçado parabólico para o cabo de protensão, este método se mostra mais preciso e adequado para a obtenção de esforços de protensão gerados por cabos com traçado genérico.

A viga deve ser discretizada em trechos, como ilustrado na Figura 3-11.

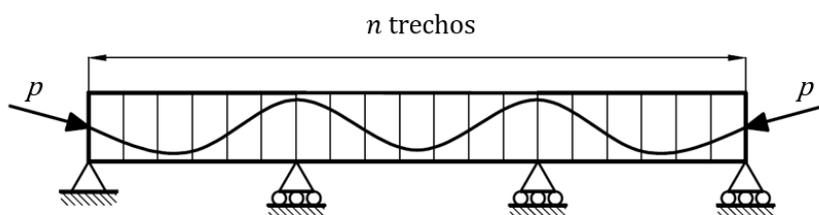


Figura 3-11 – Viga protendida subdividida em trechos.

Conforme ALVES (1994) descreve, o princípio deste método de carga equivalente se baseia no equilíbrio de momentos e forças nos extremos de cada trecho da viga (Figura 3-12). Os ângulos de entrada e de saída do cabo para a seção são denotados por α_1 e α_2 , respectivamente. Conhecidas as propriedades geométricas do traçado do cabo e o valor da força de protensão P , os esforços internos de protensão Q , N e M são obtidos pelas expressões (2-2), (2-3) e (2-4), respectivamente, para as duas faces do elemento.

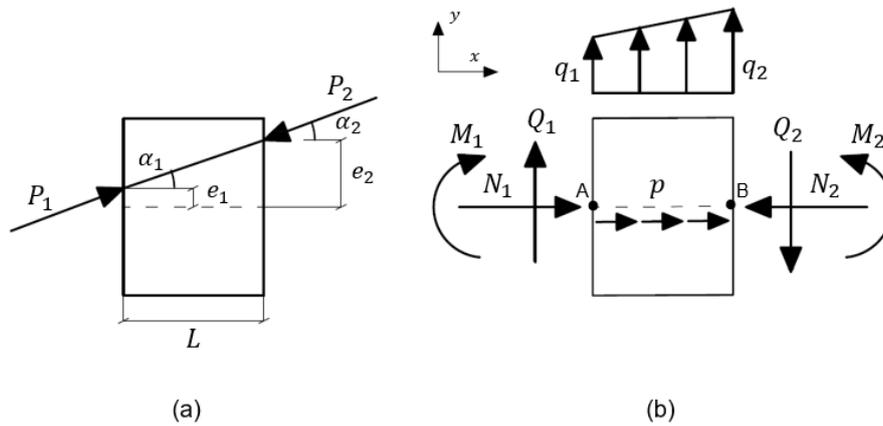


Figura 3-12 – (a) Trecho da viga protendida; (b) Forças equivalentes de protensão.

A partir destas grandezas, são determinadas as cargas equivalentes distribuídas q e p . A primeira representa a componente vertical do esforço equivalente e a segunda, a componente axial. Observa-se que, de forma diferente ao descrito pelo Método da Carga Equivalente Convencional, a carga vertical distribuída possui variação linear ao longo do trecho de aplicação, tornando-se uma carga trapezoidal.

O equilíbrio de forças horizontais do elemento resulta na seguinte relação:

$$\sum F_H = 0 \rightarrow N_1 - N_2 + p \cdot L = 0 \quad (3-14)$$

Obtém-se, assim:

$$p = \frac{N_2 - N_1}{L} \quad (3-15)$$

Pelo equilíbrio de momentos em relação aos pontos A e B do elemento obtêm-se as relações:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -M_1 + M_2 - Q_2 \cdot L + q_1 \cdot L \cdot \frac{L}{2} + \frac{(q_2 - q_1) \cdot L}{2} \cdot \frac{2L}{3} = 0 \quad (3-16)$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -M_1 + M_2 - Q_1 \cdot L - q_1 \cdot L \cdot \frac{L}{2} - \frac{(q_2 - q_1) \cdot L}{2} \cdot \frac{L}{3} = 0 \quad (3-17)$$

A solução do sistema formado por (3-16) e (3-17) resulta em:

$$q_1 = -\frac{6(M_1 - M_2)}{L^2} - \frac{2(2Q_1 + Q_2)}{L} \quad (3-18)$$

$$q_2 = \frac{6(M_1 - M_2)}{L^2} + \frac{2(2Q_2 + Q_1)}{L} \quad (3-19)$$

A partir das equações (3-15), (3-18) e (3-19) é possível determinar as cargas equivalentes de protensão para cada trecho da viga. Assim como descrito no item 3.2, os momentos totais de protensão são obtidos pela aplicação das cargas equivalentes em seus respectivos trechos. O momento fletor hiperestático de protensão pode ser determinado de forma simples a partir da expressão (2-7).

Ressalta-se que o Método de ALVES, além de permitir a análise da protensão com traçado genérico qualquer, possibilita a consideração de perdas de protensão ao longo da estrutura. Ainda, este método pode ser adaptado para estruturas com variação de inércia e de greide.

4. Aplicação de linhas de influência para análise da protensão

Este capítulo apresenta, sequencialmente, os conceitos de linha de influência de momentos fletores gerada por forças, por momentos concentrados e por momentos de protensão. Em seguida, estes conceitos são relacionados e aplicados à determinação de momentos fletores hiperestáticos de protensão, descrevendo-se o método proposto de cálculo para este esforço.

O fundamento do método proposto é obter o momento fletor hiperestático de protensão em uma seção s por meio da integração do produto entre a linha de influência de momentos fletores hiperestáticos e o diagrama de momentos fletores isostáticos de protensão (equação (4-1)).

$$M_{hip}(s) = \int_0^L M_{iso}(x) \cdot \eta_{MP}(x) dx \quad (4-1)$$

onde:

$M_{hip}(s)$ é o momento fletor hiperestático na seção s gerado pela protensão;

s é o índice que indica a seção da viga para qual se realiza o cálculo;

$M_{iso}(x)$ é o momento isostático gerado pela protensão ao longo da viga;

$\eta_{MP}(x)$ é a linha de influência de momentos hiperestáticos na seção s gerados pela protensão ao longo da viga;

L é o comprimento total da viga.

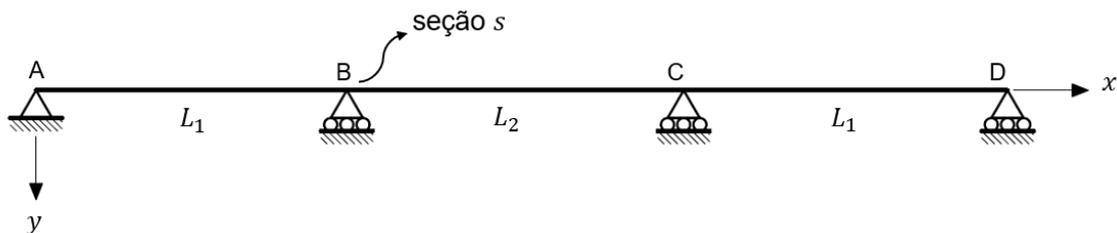


Figura 4-1– Viga para demonstração do método proposto.

Como enuncia GHALI (1969), a linha de influência de momentos hiperestáticos de protensão, $\eta_{MP}(x)$, é definida como o momento fletor hiperestático em uma seção s

devido a uma força unitária de protensão aplicada a uma excentricidade unitária em um elemento de comprimento unitário na seção x . Este conceito será discutido de forma mais detalhada no item 4.3 deste capítulo.

Para ângulos de inclinação dos cabos de pequena magnitude, o momento isostático M_{iso} é aproximado pela equação (2-6). Assim, a equação (4-1) resulta em (GHALI e NEVILLE, 1972):

$$M_{hip}(s) = \int_0^L P \cdot e(x) \cdot \eta_{MP}(x) dx \quad (4-2)$$

onde $e(x)$ é a função que descreve a excentricidade do cabo ao longo da viga.

É possível, então, determinar o momento hiperestático de protensão para as principais seções de cálculo e, em seguida, como este esforço apresenta variação linear ao longo da viga, traça-se facilmente o diagrama.

Ressalta-se que o método de cálculo desenvolvido neste trabalho apresenta algumas limitações, tais como: consideração dos apoios externos da estrutura como rotulados; desconsideração de deformações axiais e deformações por cisalhamento; vigas apresentam greide e momento de inércia constantes ao longo de seu comprimento; os momentos fletores isostáticos são tomados como contínuos; desconsideram-se perdas de protensão.

4.1. Linha de influência de momentos fletores gerados por força unitária

Uma carga aplicada em uma posição qualquer de abscissa x de uma estrutura causa deformação e diversos esforços internos, tais como momentos fletores, esforços axiais, esforços cortantes etc. Quando os valores dos esforços provocados em uma seção s são representados graficamente na abscissa do ponto de aplicação da carga, obtém-se uma linha de influência para esta seção (GHALI e NEVILLE, 1972). Assim, a linha de influência de uma seção s de uma viga é definida como a curva cujas ordenadas são os valores do esforço em questão na seção s gerado por uma carga que se desloca ao longo da viga.

A Figura 4-2 ilustra a linha de influência de momentos fletores gerados por uma força unitária que se move ao longo da viga. As ordenadas $\eta_{MQ}(x)$ desta curva são os momentos fletores da seção s devidos à ação de uma força concentrada de valor unitário em cada abscissa x da viga.

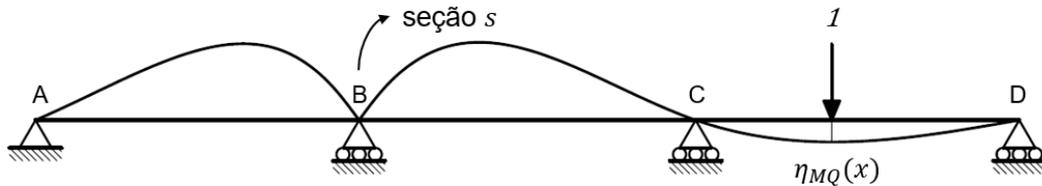


Figura 4-2 – Linha de influência $\eta_{MQ}(x)$ de momentos fletores na seção s .

Pretende-se demonstrar, por meio do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), que as ordenadas $\eta_{MQ}(x)$ equivalem às ordenadas da deformada $v_s(x)$, gerada pela aplicação de uma rotação unitária na seção s , onde se introduz uma rótula fictícia (Figura 4-3).

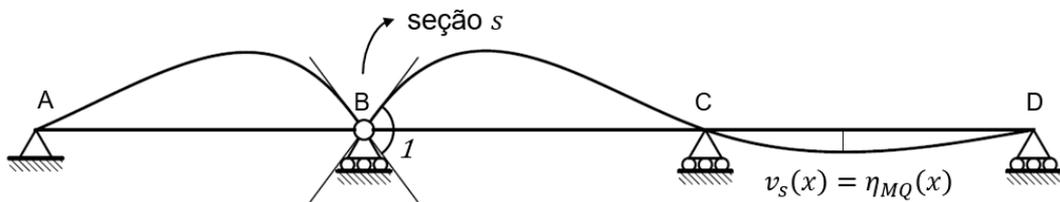


Figura 4-3 – Linha de influência de momentos fletores gerada por uma rotação unitária.

Para isso, define-se o sistema estrutural da viga biapoiada ilustrado na Figura 4-4, para o qual se busca obter o momento fletor η_{MQ} gerado na seção s .

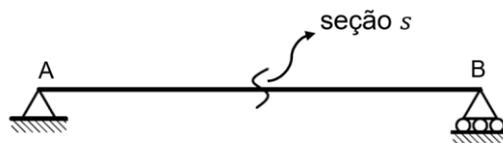


Figura 4-4 – Sistema estrutural para aplicação do PTV.

Assumem-se, respectivamente, os sistemas real e virtual ilustrados na Figura 4-5, nos quais o vínculo correspondente à incógnita η_{MQ} foi rompido pela introdução da rótula fictícia.

No sistema real (Figura 4-5a), o momento fletor η_{MQ} foi aplicado como uma força externa para preservar a compatibilidade com o sistema estrutural inicial. O deslocamento virtual gerado pela rotação unitária imposta sobre a estrutura modificada é um deslocamento infinitesimal imaginário (Figura 4-5b). Entende-se, então, por trabalho virtual, o trabalho realizado pelas forças reais durante estes deslocamentos virtuais.

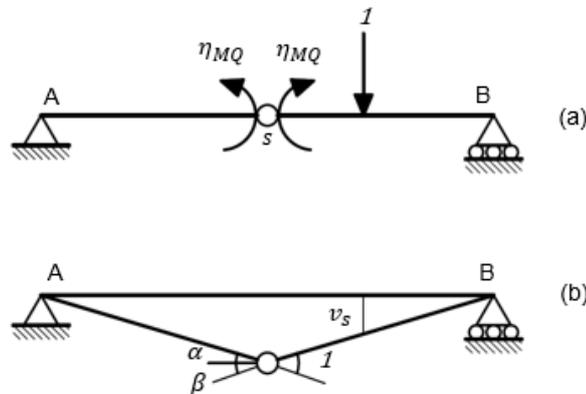


Figura 4-5 – (a) Sistema de forças reais; (b) Sistema de deslocamentos virtuais infinitesimais compatíveis.

Pelo PTV, o trabalho virtual das forças externas aplicadas à estrutura (trabalho externo) é igual ao trabalho virtual das forças internas (trabalho interno) (TIMOSHENKO e GERE, 1984, p. 335):

$$W_{ext} = W_{int} \quad (4-3)$$

Uma vez que as forças externas aplicadas ao sistema são a força unitária e o momento $\eta_{MQ}(x)$, obtém-se W_{ext} pelo produto destas cargas com seus deslocamentos externos virtuais correspondentes:

$$W_{ext} = 1 \cdot v_s(x) - \eta_{MQ}(x) \cdot \alpha - \eta_{MQ}(x) \cdot \beta \quad (4-4)$$

Como $\alpha + \beta = 1$, tem-se:

$$W_{ext} = v_s(x) - \eta_{MQ}(x) \quad (4-5)$$

Como não há deformações internas virtuais:

$$W_{int} = 0 \quad (4-6)$$

Combinando as equações (4-5) e (4-6) em (4-3), obtém-se:

$$v_s(x) = \eta_{MQ}(x) \quad (4-7)$$

A equação (4-7) demonstra que o momento fletor gerado na seção s pela aplicação da força unitária no ponto de abscissa x equivale à deformada do sistema (Figura 4-5b) nesta mesma abscissa. Isto é, a linha de influência de momentos fletores da seção s , denominada $\eta_{MQ}(x)$, pode ser obtida pela deformada do sistema virtual ilustrado. Uma vez que o deslocamento virtual aplicado à estrutura é infinitesimal, a equação (4-7) vale também para estruturas hiperestáticas (como a da Figura 4-3), nas quais as deformações internas virtuais apresentam magnitude desprezível.

Deste fundamento, desenvolve-se o método cinemático para o traçado da linha de influência de uma estrutura gerada por carga concentrada, conhecido como o Princípio de Muller-Breslau. Conforme descrito por SÜSSEKIND (1984), primeiramente, rompe-se o vínculo que transmite o esforço cuja linha de influência pretende-se determinar (neste exemplo, momento fletor). Em seguida, impõe-se na seção s , no sentido oposto ao do esforço positivo, um deslocamento unitário, que será tratado como uma deformação de pequena magnitude. A deformada gerada na estrutura representa sua linha de influência gerada por força concentrada para o esforço em questão.

O conceito de linhas de influência auxilia a análise de estruturas submetidas a carregamentos móveis, uma vez que seu traçado permite identificar os trechos da estrutura nos quais a ação das cargas é capaz de provocar esforços máximos ou mínimos em uma determinada seção. O esforço em uma seção s qualquer é obtido pelo produto do valor da carga concentrada com a ordenada da linha de influência no seu ponto de aplicação. Para um carregamento distribuído, o esforço resulta da integral do produto entre a função que descreve o carregamento e a função que descreve a linha de influência.

Assim, o valor de um esforço E genérico em s , gerado pela aplicação de um carregamento qualquer ao longo da estrutura, descrito por $f(x)$, pode ser obtido por:

$$E(s) = \int_0^L \eta_{EF}(x) \cdot f(x) dx \quad (4-8)$$

onde $\eta_{EF}(x)$ é a linha de influência da seção s para esforço do tipo E gerado por carregamento unitário do tipo F .

4.2. Linha de influência de momentos fletores gerados por momento unitário

De forma análoga ao que se demonstrou no item anterior, pode-se definir a linha de influência de momentos fletores gerados por um momento unitário, denominada $\eta_{MC}(x)$, como a curva cuja ordenada representa o momento fletor gerado em s pela aplicação de um momento unitário que se desloca ao longo da viga (Figura 4-6). O efeito deste momento unitário é o mesmo que o de um binário de sentido horário formado por forças unitárias separadas por uma distância também unitária.

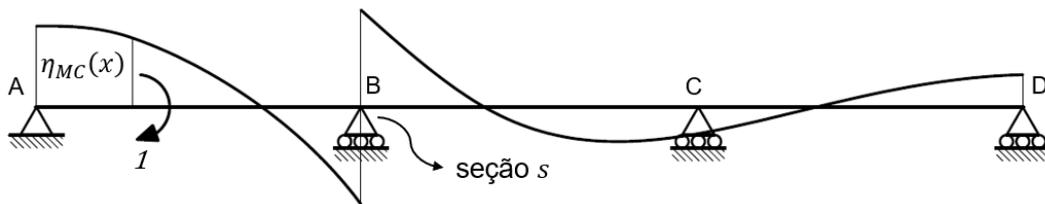


Figura 4-6 – Linha de influência $\eta_{MC}(x)$ de momentos fletores na seção s .

Demonstra-se, aqui, por meio do Teorema da Reciprocidade, que essa linha de influência gerada por um momento concentrado equivale à derivada da linha de influência gerada por uma força concentrada $\eta_{MQ}(x)$, definida no item 4.1.

Para tal, são definidos dois sistemas estruturais, nos quais rompe-se o vínculo correspondente à incógnita que se busca (o momento fletor η_{MC}). No sistema (a), o momento $\eta_{MC}(x)$ foi aplicado como uma força externa de forma a preservar a compatibilidade com o sistema estrutural original (Figura 4-7a).

Já o sistema (b), representa a deformada $v_s(x)$ gerada pela aplicação de uma rotação unitária na seção s , como já descrito no item 4.1. Esta rotação está associada a um par de momentos de valor desconhecido N .

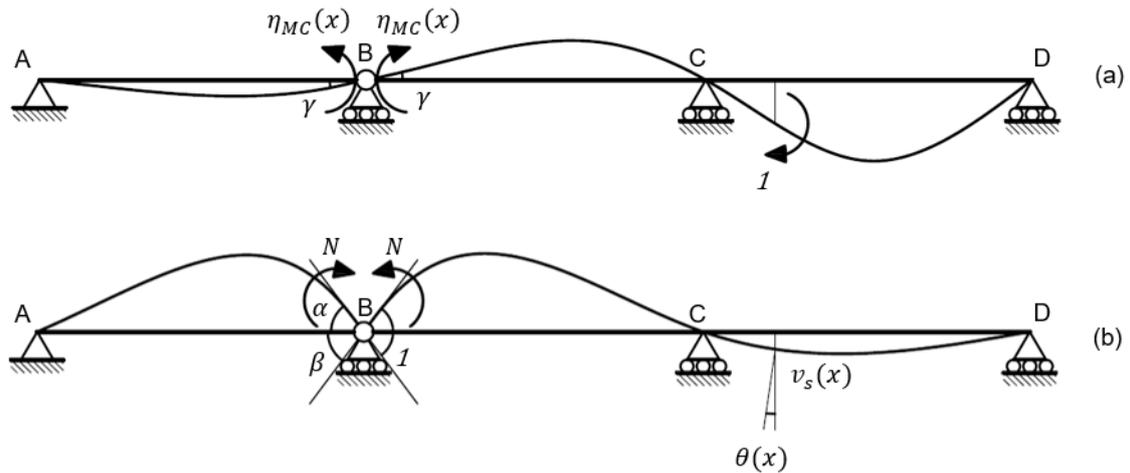


Figura 4-7 – Sistemas (a) e (b) para aplicação do Teorema da Reciprocidade.

Cada sistema é definido por um conjunto de forças externas F e esforços internos f , associados às deformadas externas D e às internas infinitesimais d . Assumindo-se, então, o sistema (a) como real e o sistema (b) como virtual, pode-se escrever, pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais (equação (4-3)):

$$\sum F_a \cdot D_b = \int f_a \cdot d_b \quad (4-9)$$

Considerando-se, em seguida, o inverso: sistema (a) como virtual e o sistema (b) como real, obtém-se:

$$\sum F_b \cdot D_a = \int f_b \cdot d_a \quad (4-10)$$

Assumindo-se que estrutura apresente comportamento linear, é válida a seguinte relação:

$$\int f_a \cdot d_b = \int f_b \cdot d_a \quad (4-11)$$

Aplicando-se as equações (4-9) e (4-10) em (4-11), tem-se:

$$\sum F_a \cdot D_b = \sum F_b \cdot D_a \quad (4-12)$$

Desta forma, pode-se enunciar o Teorema da Reciprocidade (Teorema de Maxwell – Betti): Se uma estrutura é submetida a dois sistemas de forças quaisquer, o

trabalho gerado pelas forças do primeiro sistema durante os deslocamentos correspondentes do segundo é igual ao trabalho gerado pelas forças do segundo sistema durante os deslocamentos do primeiro (RAMALHO, 2013).

Aplicando o Teorema da Reciprocidade (equação (4-12)) aos carregamentos e deformações dos sistemas em questão, obtém-se:

$$-\eta_{MC}(x) \cdot \alpha - \eta_{MC}(x) \cdot \beta + 1 \cdot \theta(x) = N \cdot \gamma - N \cdot \gamma \quad (4-13)$$

O ângulo de rotação da viga com relação ao seu eixo, denominado $\theta(x)$, é dado pela derivada da deformada da estrutura (TIMOSHENKO e GERE, 1983):

$$\theta(x) = \frac{dv_s(x)}{dx} \quad (4-14)$$

Como, por definição, $\alpha + \beta = 1$, a equação (4-13) resulta em:

$$\eta_{MC}(x) = \frac{dv_s(x)}{dx} \quad (4-15)$$

Aplicando-se a equação (4-7) em (4-15), tem-se (GHALI e NEVILLE, 1972, p. 346):

$$\eta_{MC}(x) = \frac{d\eta_{MQ}(x)}{dx} \quad (4-16)$$

Portanto, como afirmado anteriormente, a ordenada da linha de influência de momentos fletores gerados por um momento unitário que se movimenta ao longo do vão é igual à derivada da linha de influência de momentos fletores resultante da aplicação de uma força unitária, que também se movimenta ao longo da viga.

4.3. Linha de influência de momentos fletores gerados por par de momentos unitários

O conceito de linha de influência pode ser aplicado para a análise do efeito de protensão em estruturas hiperestáticas. Neste contexto, define-se $\eta_{MP}(x)$ como o momento fletor gerado em uma seção s da viga devido a uma força de protensão unitária com excentricidade unitária, aplicada em um elemento de comprimento também unitário (GHALI e NEVILLE, 1972).

Observa-se que este momento fletor provocado pela aplicação de esforços de protensão em uma seção distinta da estrutura é exatamente o que se entende por hiperestático de protensão. De forma prática, define-se, assim, $\eta_{MP}(x)$ como a linha de influência de momentos hiperestáticos na seção s gerados por um par de momentos unitários de protensão que se move ao longo da viga (Figura 4-8).

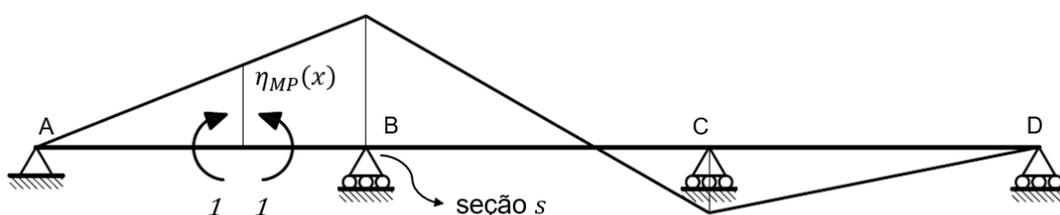


Figura 4-8 - Linha de influência $\eta_{MP}(x)$ de momentos fletores na seção s .

Aplicando-se a equação (4-8), verifica-se que a integração do produto entre a linha de influência $\eta_{MP}(x)$ e o diagrama de momentos isostáticos de protensão fornece o valor do hiperestático na seção s . Fundamenta-se, assim, a equação (4-1).

De forma análoga ao que se desenvolveu no item 4.2, demonstra-se pelo Teorema da Reciprocidade que a linha de influência gerada por um par de momentos equivale ao oposto da derivada segunda de $\eta_{MQ}(x)$.

Para a dedução desta relação, são definidos dois sistemas estruturais, nos quais rompe-se o vínculo correspondente à incógnita que se busca (momento fletor $\eta_{MP}(x)$). No sistema (a) da Figura 4-9, o momento fletor $\eta_{MP}(x)$ foi aplicado como uma força externa de forma a preservar a compatibilidade com o sistema estrutural original. Supõe-se que o primeiro momento do par de unitários atua em uma seção de abscissa x ,

enquanto o outro momento do par atua em um ponto distante uma unidade de comprimento deste, apresentando abscissa $x + 1$.

Já o sistema (b) da Figura 4-9, que representa a deformada $v_s(x)$ gerada pela aplicação de uma rotação unitária na seção s , é o mesmo sistema ilustrado na Figura 4-7b. O ângulo de rotação na abscissa x da viga é dado pela derivada da deformada (equação (4-14)) enquanto na abscissa $x + 1$, tem-se o ângulo de rotação:

$$\theta(x + 1) = \frac{dv_s(x)}{dx} + \frac{d^2v_s(x)}{dx^2} \quad (4-17)$$

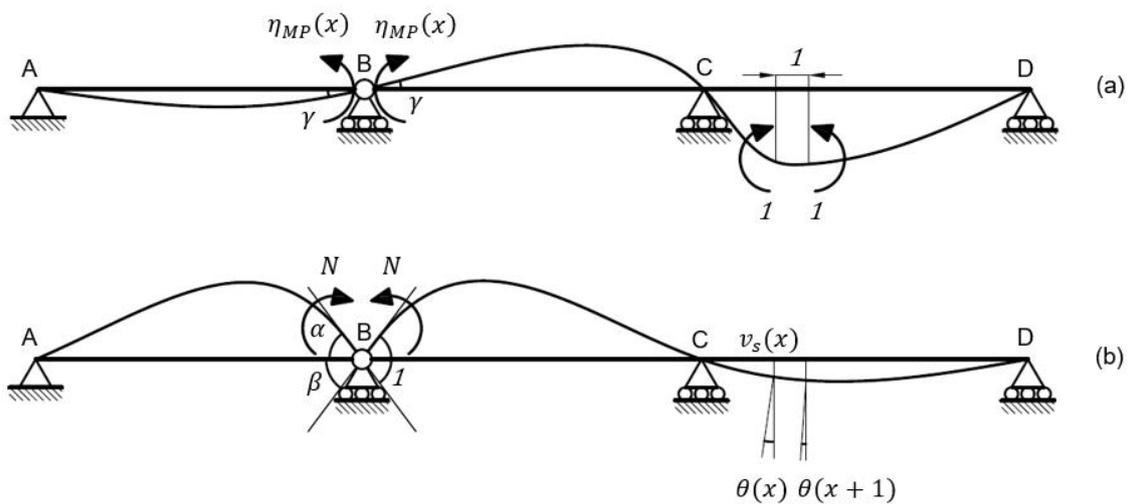


Figura 4-9 – Sistemas (a) e (b) para aplicação do Teorema da Reciprocidade.

Pelo Teorema da Reciprocidade (equação (4-12)), o trabalho das forças do sistema (a) durante os deslocamentos do sistema (b) é igual ao trabalho das forças do sistema (b) durante os deslocamentos do sistema (a):

$$-\eta_{MP}(x) \cdot \alpha - \eta_{MP}(x) \cdot \beta + 1 \cdot \theta(x) - 1 \cdot \theta(x + 1) = N \cdot \gamma - N \cdot \gamma \quad (4-18)$$

Aplicando-se a relação $\alpha + \beta = 1$ e a equação (4-17) em (4-18), obtém-se:

$$-\eta_{MP}(x) + \frac{dv_s(x)}{dx} - \frac{dv_s(x)}{dx} - \frac{d^2v_s(x)}{dx^2} = 0 \quad (4-19)$$

$$\eta_{MP}(x) = -\frac{d^2 v_s(x)}{dx^2} \quad (4-20)$$

Aplicando-se a equação (4-7) em (4-20), tem-se (GHALI e NEVILLE, 1972):

$$\eta_{MP}(x) = -\frac{d^2 \eta_{MQ}(x)}{dx^2} \quad (4-21)$$

Portanto, como afirmado anteriormente, a ordenada da linha de influência de momentos fletores gerados por um par de momentos unitários que se movimenta ao longo do vão coincide com a derivada segunda da linha de influência de uma força unitária, com sinal oposto.

4.4. Determinação do momento hiperestático de protensão

As relações entre as linhas de influência deduzidas nos itens anteriores são aplicadas para se obter uma nova formulação para a equação (4-1), que expressa o cálculo do momento hiperestático de protensão em uma seção s da viga.

Sendo $v_s(x)$ a função que descreve a deformada da viga após a ação do deslocamento rotacional unitário em s , como descrito no item 4.1, aplica-se a Equação Diferencial da Linha Elástica, descrita por TIMOSHENKO e GERE (1983):

$$\frac{d^2 v_s(x)}{dx^2} = -\frac{\overline{m}_s(x)}{E \cdot I} \quad (4-22)$$

onde:

$\overline{m}_s(x)$ é o diagrama de momentos fletores ao longo da viga associado a $v_s(x)$;

E é o módulo de elasticidade do material que compõe a estrutura;

I é o momento de inércia da seção da viga.

Importante ressaltar que $\overline{m}_s(x)$ representa o momento fletor na seção x resultante da rotação unitária na seção s , ou seja, trata-se do diagrama de momentos fletores da viga sob ação do deslocamento rotacional. As ordenadas da função $\overline{m}_s(x)$ representam uma grandeza da própria seção de abscissa x , logo, não se trata de uma linha de influência, como $\eta_{MQ}(x)$, $\eta_{MC}(x)$ ou $\eta_{MP}(x)$.

No item 4.3, demonstrou-se que a linha de influência de momentos hiperestáticos de protensão, denotada $\eta_{MP}(x)$, coincide com o oposto da derivada segunda da deformada $v_s(x)$. Aplicando-se, então, a equação (4-22) em (4-21), tem-se (GHALI e NEVILLE, 1972):

$$\eta_{MP}(x) = \frac{\overline{m}_s(x)}{E \cdot I} \quad (4-23)$$

Desta forma, é possível se obter $\eta_{MP}(x)$ a partir do diagrama de momentos fletores $\overline{m}_s(x)$ correspondente à deformada $v_s(x)$, como ilustrado na Figura 4-10. Observa-se que as funções $\eta_{MP}(x)$ e $m_s(x)$ são diretamente proporcionais, o que é ilustrado pelo fato de ambos os seus gráficos apresentarem o mesmo formato (Figura 4-8 e Figura 4-10b).

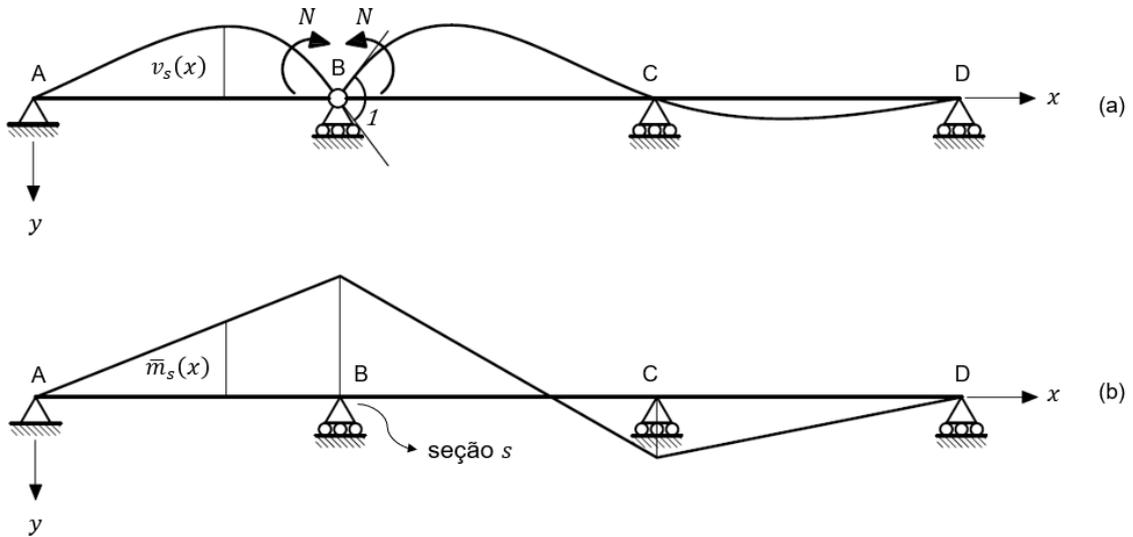


Figura 4-10 – (a) Sistema estrutural correspondente à deformada $v_s(x)$; (b) Momentos fletores $\overline{m}_s(x)$ gerados pela rotação unitária em s .

Aplicando-se a equação (4-23) em (4-1), obtém-se (KONG, 2004):

$$M_{hip}(s) = \int_0^L M_{iso}(x) \cdot \frac{\overline{m}_s(x)}{E \cdot I} dx \quad (4-24)$$

Esta equação permite o cálculo do momento hiperestático $M_{hip}(s)$ em uma seção a partir da integração do produto de dois diagramas de momentos fletores, $M_{iso}(x)$ e $\overline{m}_s(x)$, dispensando a obtenção direta das expressões de linhas de influência.

Uma forma alternativa de se escrever a equação (4-24) é pela substituição da referência ao momento $\overline{m}_s(x)$, gerado pela rotação unitária associada ao par de momentos N (Figura 4-10), pela referência ao diagrama de momentos $m_s(x)$, gerado por uma rotação θ_s que está associada a um par de momentos unitários (Figura 4-11).

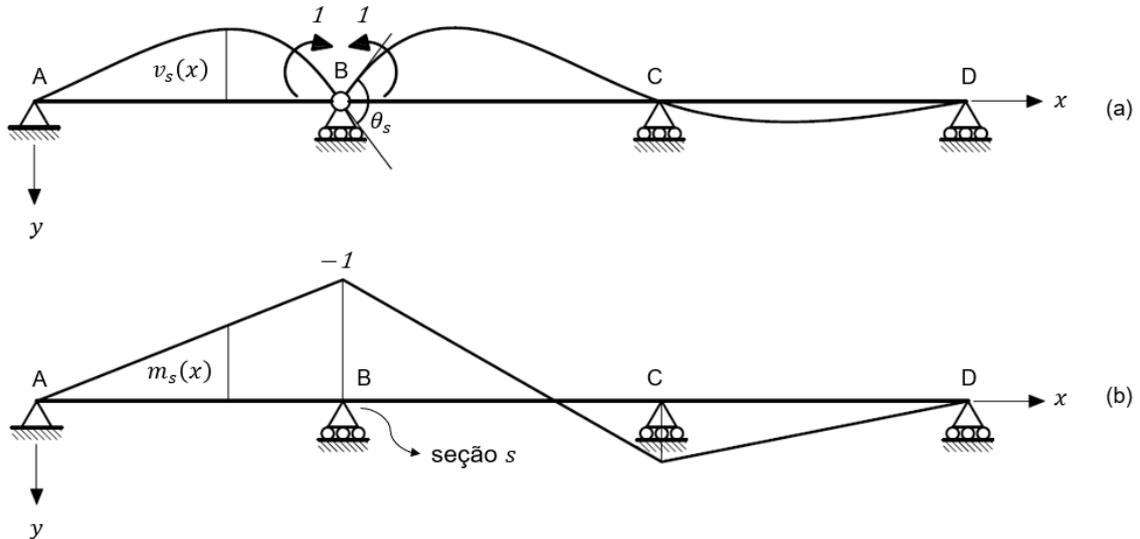


Figura 4-11 - (a) Sistema estrutural correspondente a $m_s(x)$; (b) Momentos fletores $m_s(x)$ gerados pela rotação θ_s na seção s .

Pelo Teorema da Reciprocidade, tem-se:

$$\overline{m}_s(x) = \frac{1}{|\theta_s|} m_s(x) \quad (4-25)$$

A expressão para o momento hiperestático de protensão se torna, então

$$M_{hip}(s) = \frac{1}{|\theta_s|} \int_0^L M_{iso}(x) \cdot \frac{m_s(x)}{E \cdot I} dx \quad (4-26)$$

A aplicação de um par de momentos unitários com rotação desconhecida se mostra vantajosa pela facilidade em se determinar θ_s e m_s pelo Método da Carga Unitária e pelo Método dos Deslocamentos (Método da Rigidez), como demonstrado nos próximos capítulos.

Assumindo-se um sistema de coordenadas locais (\bar{x}, \bar{y}) para cada trecho ou vão da viga, a integral da Eq. (4-26) divide-se em um somatório de integrais

$$M_{hip}(s) = \frac{1}{|\theta_s|} \sum_i^n \left[\int_0^L M_{iso}(\bar{x}) \cdot \frac{m_s(\bar{x})}{E \cdot I} d\bar{x} \right] \quad (4-27)$$

5. Aplicações

Neste capítulo, aplica-se a expressão (4-26), demonstrada no capítulo anterior, para a determinação do momento hiperestático de protensão em vigas de dois e de três vãos com diversos traçados de cabo. Deduzem-se expressões analíticas e traçam-se ábacos para obtenção direta e prática desta grandeza.

5.1. Dois vãos protendidos com excentricidade constante

A Figura 5-1 ilustra uma viga com três apoios sob a ação de uma força de protensão P atuante em um cabo de excentricidade constante e com relação ao centroide da seção da viga. Pretende-se traçar o diagrama de momentos fletores hiperestáticos da estrutura e, em seguida, seu diagrama de momentos fletores totais.

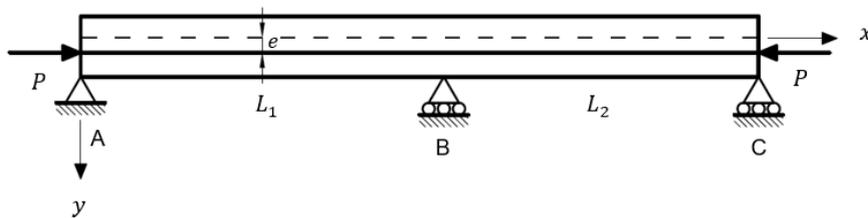


Figura 5-1 -Viga de dois vãos sob ação de protensão com excentricidade constante.

Para isso, busca-se, primeiramente, obter o momento hiperestático no apoio central B , definido a partir da equação (4-27):

$$M_{hip}(B) = \frac{1}{|\theta_B|} \sum_{i=1}^{n=2} \left[\int_0^L M_{iso}(\bar{x}) \cdot \frac{m_B(\bar{x})}{E \cdot I} d\bar{x} \right] \quad (5-1)$$

A integração é realizada para os dois vãos da viga, AB e BC , assumindo-se sistemas de coordenadas locais com a origem em A e B , respectivamente.

Rompendo-se o vínculo correspondente à incógnita $M_{hip}(B)$ com a introdução de uma rótula fictícia e aplicando-se um par de momentos unitários, obtém-se o sistema estrutural da Figura 5-2, correspondente ao diagrama de momentos fletores $m_B(x)$.

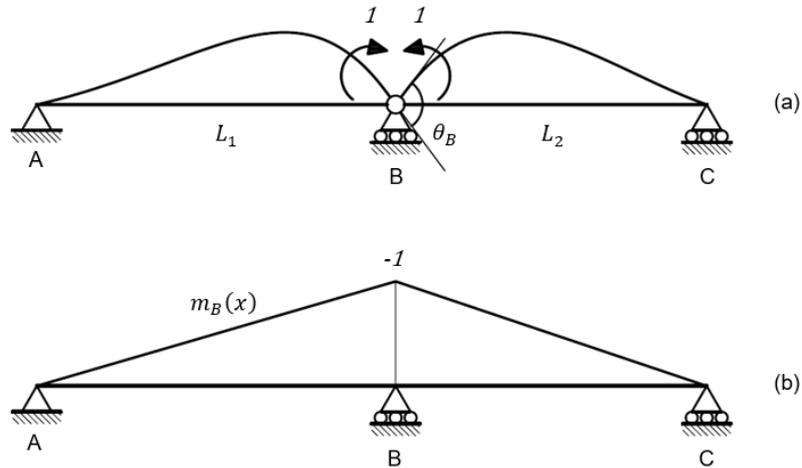


Figura 5-2 – (a) Sistema estrutural; (b) Diagrama de momentos fletores $m_B(x)$.

Observa-se que o sistema estrutural da Figura 5-2a pode ser dividido em dois trechos isostáticos, AB e BC . Desta forma, pode-se escrever:

$$|\theta_B| = |\theta_{BA}| + |\theta_{BC}| \quad (5-2)$$

onde θ_{BA} e θ_{BC} são as rotações no apoio B referentes aos trechos AB e BC , respectivamente.

Analisando-se separadamente o sistema estrutural AB (Figura 5-3), pode-se obter θ_{BA} pelo Método da Carga Unitária (MCU), um caso particular de aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais (equação (4-3)).

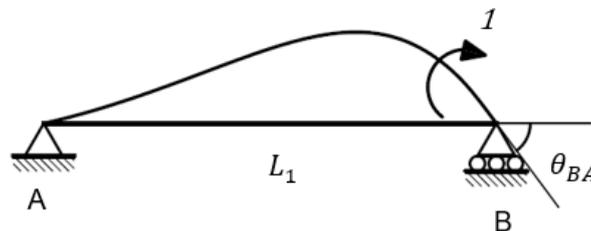


Figura 5-3 – Sistema estrutural isostático AB .

O MCU consiste na aplicação de uma carga virtual unitária na mesma direção e sentido do deslocamento desconhecido da estrutura, definindo-se o sistema estrutural tomado como real. Como descrito por TIMOSHENKO e GERE (1984), a configuração de deformações virtuais é escolhida para coincidir com a que ocorre na viga em decorrência do carregamento real. Assim, a configuração de deformações virtuais imposta está associada a $m_B(x)$ e, conseqüentemente, ao deslocamento a ser determinado θ_{BA} .

Considerando-se estes fundamentos ao sistema ilustrado na Figura 5-3, para a determinação do deslocamento rotacional em B , aplica-se um momento unitário neste apoio. Observa-se que a única carga que exerce trabalho externo é o momento unitário, portanto, tem-se:

$$W_{ext} = 1 \times \theta_{BA} \quad (5-3)$$

Considerando-se que apenas os momentos fletores realizam trabalho interno, tem-se:

$$W_{int} = \int_0^{L_1} M_U d\theta \quad (5-4)$$

onde M_U representa o diagrama de momentos fletores devidos à ação da carga unitária e $d\theta$ representa a rotação infinitesimal real da estrutura, compatível com $m_B(x)$. Aplicando-se, então, a equação (4-14) em (4-22), obtém-se a expressão para o diferencial do ângulo de rotação da estrutura em relação ao seu eixo:

$$d\theta = \frac{m_B(x)}{EI} dx \quad (5-5)$$

Tem-se, assim, a seguinte expressão para o trabalho virtual interno:

$$W_{int} = \int_0^{L_1} \frac{M_U \cdot m_B(x)}{EI} dx \quad (5-6)$$

Pelo PTV, como $W_{ext} = W_{int}$, obtém-se:

$$\theta_{BA} = \int_0^{L_1} \frac{M_U \cdot m_B(x)}{EI} dx \quad (5-7)$$

No problema presente, $M_U = m_B(x)$, pois o carregamento real que atua na estrutura coincide com a carga unitária fictícia imposta. A expressão (5-7) pode ser escrita por:

$$\theta_{BA} = \int_0^{L_1} \frac{m_B(x) \cdot m_B(x)}{EI} dx \quad (5-8)$$

A função que define o momento fletor $m_B(x)$ é obtida a partir da equação geral da reta:

$$y = ax + b \quad (5-9)$$

Aplicando-se as condições de contorno $y(0) = 0$ e $y(L_1) = -1$ para o vão AB , obtidas a partir da Figura 5-2b, obtêm-se:

$$a = -\frac{1}{L_1} \quad (5-10)$$

$$b = 0 \quad (5-11)$$

Dessa forma, determina-se a expressão para o momento fletor ao longo do trecho AB da viga:

$$m_B(x) = -\frac{x}{L_1}; 0 \leq x < L_1 \quad (5-12)$$

Substituindo-se (5-12) em (5-8) e integrando, assumindo E e I constantes:

$$|\theta_{BA}| = \frac{L_1}{3EI} \quad (5-13)$$

Analogamente, para o sistema BC , tem-se:

$$|\theta_{BC}| = \frac{L_1}{3EI} \quad (5-14)$$

O ângulo θ_B , definido na equação (5-2), tem o valor de:

$$|\theta_B| = \frac{L_1 + L_2}{3EI} \quad (5-15)$$

Define-se, em seguida, a expressão para o momento $m_B(x)$ para o trecho BC da viga, em seu referencial local, com origem em B . Aplicando-se as condições de contorno $y(0) = -1$ e $y(L_2) = 0$ em (5-13), obtêm-se:

$$a = \frac{1}{L_2} \quad (5-16)$$

$$b = -1 \quad (5-17)$$

o que resulta na expressão para o momento fletor no vão BC :

$$m_B(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{L_2} - 1; 0 \leq \bar{x} < L_2 \quad (5-18)$$

Como o referencial local para o trecho AB coincide com o referencial global da estrutura, mantém-se a equação (5-12) para a expressão do momento fletor neste trecho. Substituindo-se as expressões (5-12) e (5-18) para $m_B(\bar{x})$ em (5-1), tem-se:

$$M_{hip}(B) = \frac{1}{|\theta_B|EI} \left[\int_0^{L_1} M_{iso}(\bar{x}) \cdot \left(-\frac{\bar{x}}{L_1}\right) d\bar{x} + \int_0^{L_2} M_{iso}(\bar{x}) \cdot \left(\frac{\bar{x}}{L_2} - 1\right) d\bar{x} \right] \quad (5-19)$$

onde $|\theta_B|$ é dado pela equação (5-15). O momento fletor isostático é obtido a partir de (2-6) e tem valor constante ao longo da viga:

$$M_{iso}(\bar{x}) = -P \cdot e \quad (5-20)$$

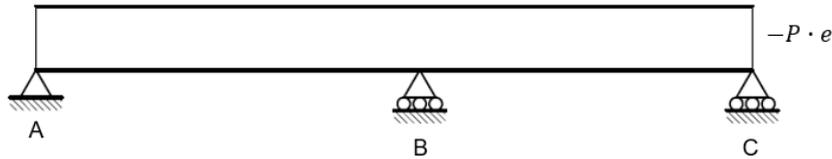


Figura 5-4 – Diagrama de momentos fletores isostáticos de protensão $M_{iso}(x)$.

Integrando-se (5-19), obtém-se:

$$M_{hip}(B) = \frac{-3 P \cdot e}{(L_1 + L_2)} \left(-\frac{L_1}{2} - \frac{L_2}{2} \right) \quad (5-21)$$

Após simplificações, tem-se:

$$M_{hip}(B) = \frac{3 P \cdot e}{2} \quad (5-22)$$

Observa-se que esta é a mesma expressão deduzida por KONG (2004) e por THOMAZ (2009) para determinação do momento hiperestático no apoio central de uma viga protendida de dois vãos com excentricidade do traçado constante.

Sabendo-se que este momento hiperestático apresenta variação linear ao longo da viga e que possui valores nulos nos apoios externos (nas seções extremas só atua

o momento fletor isostático), pode-se, então, traçar o diagrama de momentos hiperestáticos $M_{hip}(x)$ ao longo da viga (Figura 5-5).

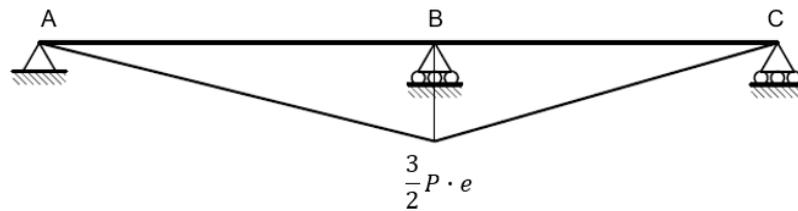


Figura 5-5 – Diagrama de momentos fletores hiperestáticos de protensão $M_{hip}(x)$.

Em seguida, o diagrama de momentos fletores totais (Figura 5-6) da estrutura protendida é facilmente obtido pelo somatório das ordenadas dos diagramas de momentos fletores isostático (Figura 5-4) e hiperestático (Figura 5-5), conforme a equação (2-7):

$$M_{tot}(B) = \frac{P \cdot e}{2} \quad (5-23)$$

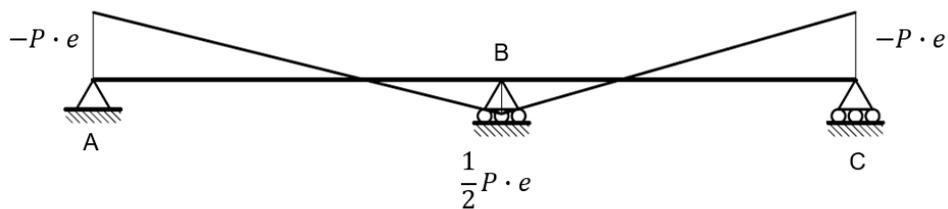


Figura 5-6 – Diagrama de momentos fletores totais de protensão $M(x)$.

5.2. Dois vãos protendidos com traçado poligonal dos cabos

Analogamente ao que se demonstrou no item 5.1, busca-se obter o diagrama de momentos fletores hiperestáticos e o de momentos fletores totais para uma viga protendida de dois vãos com traçado poligonal ilustrada na Figura 5-7.

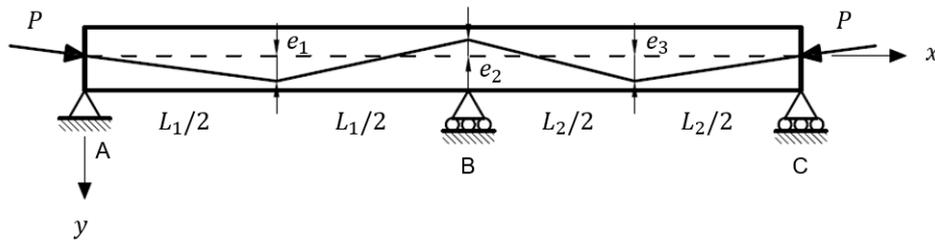


Figura 5-7 – Viga protendida de dois vãos com traçado de variação poligonal.

Como o sistema estrutural coincide com o do exemplo anterior, os valores de θ_B e $m_B(x)$ já são conhecidos. Vale, portanto, a equação (5-19), onde $|\theta_B|$ é dado pela equação (5-15):

$$M_{hip}(B) = \frac{1}{|\theta_B|EI} \left[\int_0^{L_1} M_{iso}(\bar{x}) \cdot \left(-\frac{\bar{x}}{L_1}\right) d\bar{x} + \int_0^{L_2} M_{iso}(\bar{x}) \cdot \left(\frac{\bar{x}}{L_2} - 1\right) d\bar{x} \right] \quad (5-24)$$

O que diferencia este exemplo do anterior é apenas o momento fletor isostático $M_{iso}(x)$. Assumindo-se que os ângulos de inclinação do cabo de protensão ao longo da viga apresentam pequena magnitude, é válida a equação (2-6) para a obtenção do momento fletor isostático.

A excentricidade do traçado do cabo expressa, no referencial local de cada vão, pela equação geral da reta é dada por:

$$y(\bar{x}) = a\bar{x} + b \quad (5-25)$$

A função que determina $y(\bar{x})$ para o vão AB pode ser dividida em dois segmentos de retas, definidos, pelas suas respectivas condições de contorno. Para o primeiro trecho, substituindo-se $y(0) = 0$ e $y(L_1/2) = e_1$ em (5-25), obtêm-se os seguintes coeficientes:

$$a = \frac{2e_1}{L_1} \quad (5-26)$$

$$b = 0 \quad (5-27)$$

Para o segundo trecho de reta, as condições de contorno são $y(L_1/2) = e_1$ e $y(L_1) = -e_2$, resultando em:

$$a = -\frac{2(e_1 + e_2)}{L_1} \quad (5-28)$$

$$b = 2e_1 + e_2 \quad (5-29)$$

Assim, a excentricidade do traçado do cabo no referencial local do vão AB é expressa por:

$$y(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{2e_1}{L_1} \bar{x}; & 0 \leq \bar{x} \leq \frac{L_1}{2} \\ -\frac{2(e_1 + e_2)}{L_1} \bar{x} + (2e_1 + e_2); & \frac{L_1}{2} \leq \bar{x} \leq L_1 \end{cases} \quad (5-30)$$

Analogamente, para o vão BC , aplicando-se as condições de contorno do primeiro segmento $y(0) = -e_2$ e $y(L_2/2) = e_3$, obtêm-se os coeficientes:

$$a = \frac{2(e_2 + e_3)}{L_2} \quad (5-31)$$

$$b = -e_2 \quad (5-32)$$

Para o segundo segmento, têm-se $y(L_2/2) = e_3$ e $y(L_2) = 0$, o que resulta em:

$$a = -\frac{2e_3}{L_2} \quad (5-33)$$

$$b = 2e_3 \quad (5-34)$$

Desta forma, a excentricidade do traçado do cabo no referencial local do vão BC é expressa por:

$$y(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{2(e_2 + e_3)}{L_2} \bar{x} - e_2; & 0 \leq \bar{x} \leq \frac{L_2}{2} \\ -\frac{2e_3}{L_2} \bar{x} + 2e_3; & \frac{L_2}{2} \leq \bar{x} \leq L_2 \end{cases} \quad (5-35)$$

Obtêm-se, em seguida, as expressões para o momento fletor isostático em cada vão (Figura 5-8), substituindo-se as expressões (5-30) e (5-35) em (2-6):

$$M_{iso}(\bar{x}) = \begin{cases} -\frac{2e_1P}{L_1}\bar{x}; & 0 \leq \bar{x} \leq \frac{L_1}{2} \\ P \left[\frac{2(e_1 + e_2)}{L_1}\bar{x} - (2e_1 + e_2) \right]; & \frac{L_1}{2} \leq \bar{x} \leq L_1 \end{cases} \quad (5-36)$$

$$M_{iso}(\bar{x}) = \begin{cases} P \left[-\frac{2(e_2 + e_3)}{L_2}\bar{x} + e_2 \right]; & 0 \leq \bar{x} \leq \frac{L_1}{2} \\ P \left[\frac{2e_3}{L_2}\bar{x} - 2e_3 \right]; & \frac{L_1}{2} \leq \bar{x} \leq L_1 \end{cases} \quad (5-37)$$

A Figura 5-8 ilustra o diagrama de momentos fletores isostáticos de protensão.

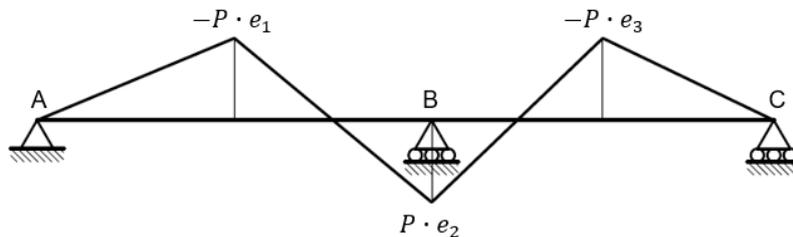


Figura 5-8 - Diagrama de momentos fletores isostáticos de protensão $M_{iso}(x)$.

Substituindo-se (5-36) e (5-37) em (5-24), obtêm-se, após simplificações:

$$M_{hip}(B) = \frac{P}{8} \left[\frac{6(e_1 \cdot L_1 + e_3 \cdot L_2)}{L_1 + L_2} - 5e_2 \right] \quad (5-38)$$

A equação (5-38) é uma expressão geral para o cálculo do momento fletor hiperestático no apoio central B de uma viga protendida de dois vãos com traçado poligonal. Sabendo-se que este momento hiperestático apresenta variação linear ao longo da viga e que possui valores nulos nos apoios externos (nas seções extremas só atua o momento isostático), pode-se traçar o diagrama de momentos fletores hiperestáticos $M_{hip}(x)$ ao longo da viga (Figura 5-9).

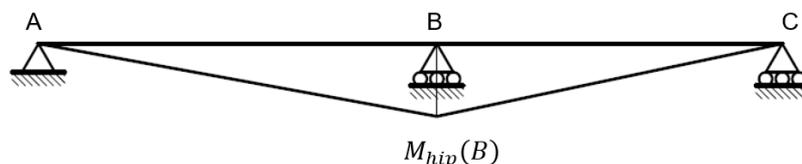


Figura 5-9 – Diagrama de momentos fletores hiperestáticos de protensão $M_{hip}(x)$.

Combinando os diagramas de momentos fletores isostáticos (Figura 5-8) e hiperestáticos (Figura 5-9). A equação (5-39) expressa o somatório de momentos fletores totais no apoio interno da viga, conforme se define na equação (2-7).

$$M_{tot}(B) = \frac{P}{8} \left[\frac{6(e_1 \cdot L_1 + e_3 \cdot L_2)}{L_1 + L_2} + 3e_2 \right] \quad (5-39)$$

Na Figura 5-10, tem-se o diagrama de momentos fletores totais $M_{tot}(x)$.

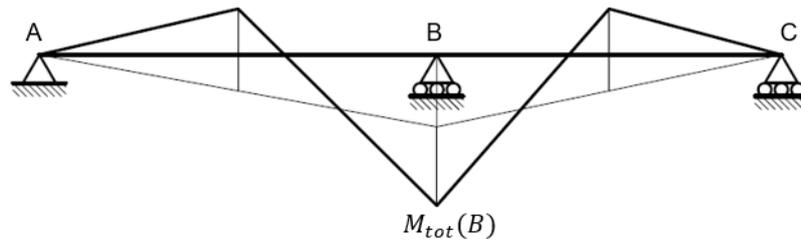


Figura 5-10 – Diagrama de momentos fletores totais de protensão $M(x)$.

Observa-se que a aplicação da equação (5-38) para o caso particular estudado por KONG (2004), que assume $e_3 = 2e_1$, $e_2 = 0$ e $L_2 = 2L_1$, resulta na mesma expressão obtida pelo autor:

$$M_{hip}(B) = 1,25P \cdot e \quad (5-40)$$

A Figura 5-11 ilustra a viga sem variação de inércia protendida de dois vãos, com traçado poligonal dos cabos seu diagrama de momentos fletores hiperestáticos.

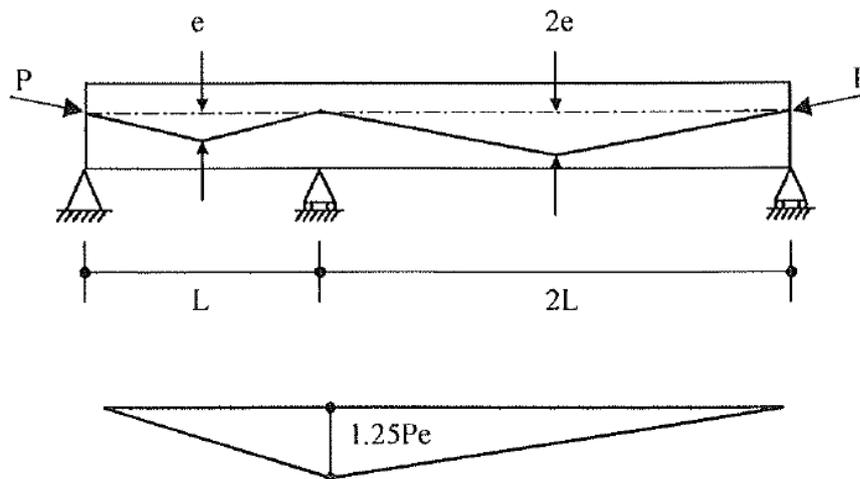


Figura 5-11 – Diagrama de momentos fletores hiperestáticos de protensão. Adaptado de: (KONG, 2004).

5.3. Dois vãos protendidos com traçado parabólico (método simplificado)

Busca-se, neste capítulo, obter o diagrama de momentos fletores hiperestáticos e o de momentos fletores totais para uma viga de dois vãos protendida com traçado parabólico. Simplificadamente, consideram-se duas parábolas sem concordância nos apoios da estrutura (Figura 5-12).

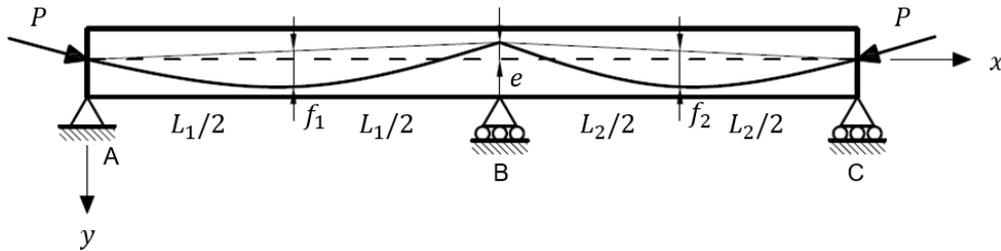


Figura 5-12 – Viga protendida de dois vãos com traçado parabólico.

Para isto, é preciso primeiramente se determinar o momento hiperestático no apoio central B. Por (4-27), tem-se:

$$M_{hip}(B) = \frac{1}{|\theta_B|} \sum_{i=1}^{n=2} \left[\int_0^L M_{iso}(\bar{x}) \cdot \frac{m_B(\bar{x})}{E \cdot I} d\bar{x} \right] \quad (5-41)$$

Uma vez que o sistema estrutural é, novamente, o mesmo que os estudados nos Capítulos 5.1 e 5.2, os valores de θ_B e $m_B(x)$ já são conhecidos. Vale, portanto, a equação (5-19), onde $|\theta_B|$ é dado pela equação (5-15):

$$M_{hip}(B) = \frac{1}{|\theta_B|EI} \left[\int_0^{L_1} M_{iso}(\bar{x}) \cdot \left(-\frac{\bar{x}}{L_1}\right) d\bar{x} + \int_0^{L_2} M_{iso}(\bar{x}) \cdot \left(\frac{\bar{x}}{L_2} - 1\right) d\bar{x} \right] \quad (5-42)$$

Assumindo-se que os ângulos de inclinação do cabo de protensão ao longo da viga possuem pequena magnitude, vale a equação (2-6) para determinação do momento fletor isostático $M_{iso}(x)$.

Para simplificação dos cálculos, a excentricidade do traçado do cabo denotada $y(x)$ será dividida em duas componentes, como se ilustra na Figura 5-13. A primeira parte, denotada $y_l(x)$, é a componente de variação linear da função, enquanto a segunda, expressa por $y_p(x)$, são arcos de parábola simétricos, com raízes nos pontos de apoio da estrutura. Tem-se:

$$y(x) = y_l(x) + y_p(x) \quad (5-43)$$

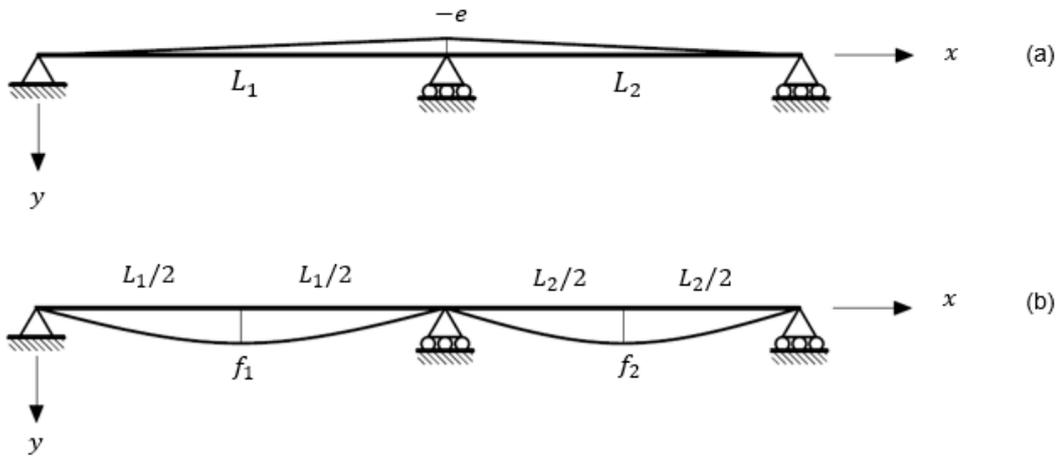


Figura 5-13 – (a) Comomente de variação linear do traçado do cabo de protensão $y_l(x)$; (b) Componente parabólica do traçado do cabo $y_p(x)$.

A parcela linear da função é descrita pela equação geral da reta para cada vão em seu referencial local:

$$y(\bar{x}) = a\bar{x} + b \quad (5-44)$$

Aplicando-se as condições de contorno $(0,0)$ e $(L_1, -e)$ para trecho AB , obtêm-se os coeficientes:

$$a = -\frac{e}{L_1} \quad (5-45)$$

$$b = 0 \quad (5-46)$$

Para o trecho BC , aplicam-se $(0, -e)$ e $(L_2, 0)$, o que resulta em:

$$a = \frac{e}{L_2} \quad (5-47)$$

$$b = -e \quad (5-48)$$

Desta forma, parcela linear da excentricidade do traçado do cabo nos vãos AB e BC , respectivamente, é expressa por:

$$y_l(\bar{x}) = -\frac{e}{L_1}\bar{x}; \quad 0 \leq \bar{x} < L_1 \quad (5-49)$$

$$y_l(\bar{x}) = -\frac{e}{L_2}(L_2 - \bar{x}); \quad 0 \leq \bar{x} < L_2 \quad (5-50)$$

Resta, portanto, se determinar a parcela parabólica. Para o vão AB , esta parcela é definida pelos pontos $(0,0)$, $(-L_1/2, -f_1)$ e $(L_1/2, -f_1)$, para um sistema de coordenadas (u, v) com origem em seu vértice (Figura 5-14). Substituindo-se estas coordenadas na equação geral da parábola:

$$v(u) = a \cdot u^2 + b \cdot u + c \quad (5-51)$$

obtêm-se:

$$a = -\frac{4f_1}{L_1^2} \quad (5-52)$$

$$b = c = 0 \quad (5-53)$$

Assim, a equação da parábola se torna:

$$v(u) = -\frac{4f_1}{L_1^2}u^2 \quad (5-54)$$

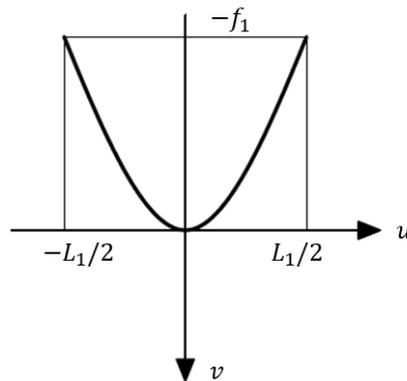


Figura 5-14 – Parcela parabólica do traçado do cabo no vão AB segundo referencial (u, v) .

Transladando-se a equação para o sistema de coordenadas local do vão AB , com origem em A , define-se $u = \bar{x} - L_1/2$, $v = y(\bar{x}) - f_1$. Assim obtém-se a seguinte equação para a parábola:

$$y_p(\bar{x}) = f_1 - \frac{4f_1}{L_1^2}\left(\bar{x} - \frac{L_1}{2}\right)^2; \quad 0 \leq \bar{x} \leq L_1 \quad (5-55)$$

Analogamente, para a parábola do trecho BC , tem-se a seguinte expressão com referencial local em B :

$$y_p(\bar{x}) = f_2 - \frac{4f_2}{L_2^2} \left(\bar{x} - \frac{L_2}{2} \right)^2 ; 0 \leq \bar{x} \leq L_2 \quad (5-56)$$

Desta forma, aplicando-se as equações (5-49), (5-50), (5-55) e (5-56) em (5-43), obtêm-se as expressões para o traçado do cabo nos trechos AB e BC respectivamente:

$$y(\bar{x}) = -\frac{e}{L_1} \bar{x} + f_1 - \frac{4f_1}{L_1^2} \left(\bar{x} - \frac{L_1}{2} \right)^2 ; 0 \leq \bar{x} \leq L_1 \quad (5-57)$$

$$y(\bar{x}) = -\frac{e}{L_2} (L_2 - \bar{x}) + f_2 - \frac{4f_2}{L_2^2} \left(\bar{x} - \frac{L_2}{2} \right)^2 ; 0 \leq \bar{x} \leq L_2 \quad (5-58)$$

Por (2-6), têm-se, então, as expressões para o momento isostático de protensão (Figura 5-15):

$$M_{iso}(\bar{x}) = P \left[\frac{e}{L_1} \bar{x} - f_1 + \frac{4f_1}{L_1^2} \left(\bar{x} - \frac{L_1}{2} \right)^2 \right] ; 0 \leq \bar{x} \leq L_1 \quad (5-59)$$

$$M_{iso}(\bar{x}) = P \left[\frac{e}{L_2} (L_2 - \bar{x}) - f_2 + \frac{4f_2}{L_2^2} \left(\bar{x} - \frac{L_2}{2} \right)^2 \right] ; 0 \leq \bar{x} \leq L_2 \quad (5-60)$$

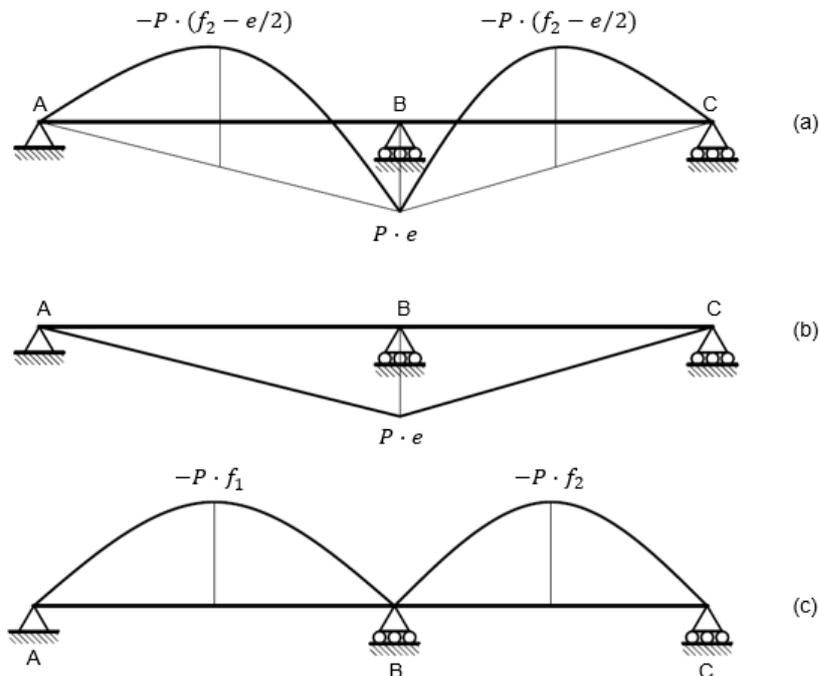


Figura 5-15 – (a) Diagrama de momentos fletores isostáticos de protensão $M_{iso}(x)$; (b) Parcela linear do diagrama $M_{iso}(x)$; (c) Parcela parabólica do diagrama $M_{iso}(x)$.

Unindo-se (5-59) e (5-60) a (5-42), obtém-se o resultado para a integral, deduzido por THOMAZ (2009):

$$M_{hip}(B) = P \left(\frac{L_1 \cdot f_1 + L_2 \cdot f_2}{L_1 + L_2} - e \right) \quad (5-61)$$

Tem-se, em (5-61), uma expressão geral para determinação do momento hiperestático no apoio central B de uma viga protendida de dois vãos com traçado parabólico sem concordância. Assumindo-se que este momento hiperestático apresenta variação linear ao longo da viga e que possui valores nulos nos apoios externos (nas seções externas só atua o momento isostático), pode-se, então, traçar o diagrama de momentos hiperestáticos $M_{hip}(x)$ ao longo da viga (Figura 5-16).

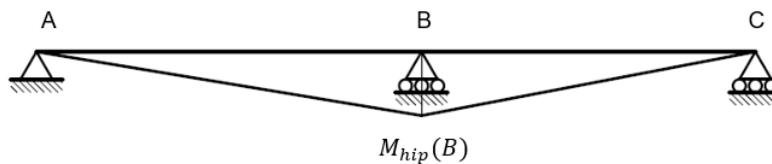


Figura 5-16 – Diagrama de momentos fletores hiperestáticos de protensão $M_{hip}(x)$.

O diagrama de momentos totais da estrutura protendida pode, então, ser facilmente obtido pela combinação dos diagramas isostático (Figura 5-15) e hiperestático (Figura 5-16). Por (2-7), tem-se:

$$M_{tot}(B) = P \left(\frac{L_1 \cdot f_1 + L_2 \cdot f_2}{L_1 + L_2} \right) \quad (5-62)$$

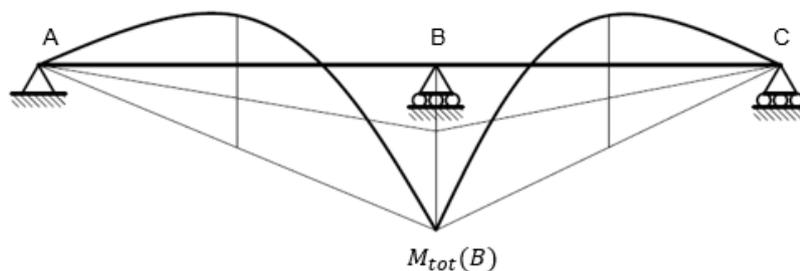


Figura 5-17 – Diagrama de momentos fletores totais de protensão $M_{tot}(x)$.

5.4. Três vãos protendidos com traçado parabólico (método simplificado)

Busca-se, neste capítulo, se obter o diagrama de momentos hiperestáticos e o de momentos totais para uma viga simétrica de três vãos protendida com traçado parabólico. Novamente, como no item 5.3 deste capítulo, serão consideradas parábolas sem concordância nos apoios da estrutura.

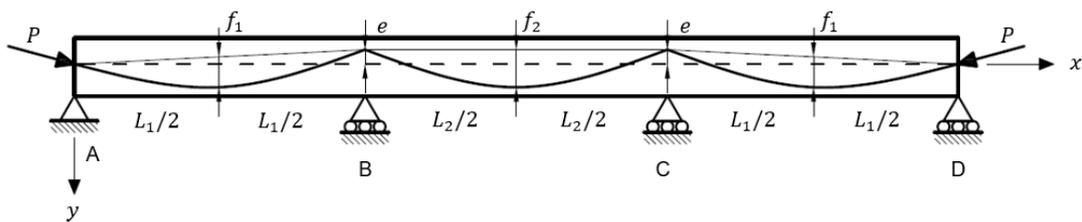


Figura 5-18 – Viga protendida de três com traçado parabólico.

Primeiramente, é preciso se determinar o momento hiperestático no apoio B, expresso por (4-27):

$$M_{hip}(B) = \frac{1}{|\theta_B|} \sum_{i=1}^{n=3} \left[\int_0^L M_{iso}(\bar{x}) \cdot \frac{m_B(\bar{x})}{E \cdot I} d\bar{x} \right] \quad (5-63)$$

Rompendo-se o vínculo correspondente à incógnita $M_{hip}(B)$ pela introdução de uma rótula fictícia e aplicando-se um par de momentos unitários, obtém-se o sistema estrutural da Figura 5-19, correspondente ao diagrama de momentos fletores $m_B(x)$.

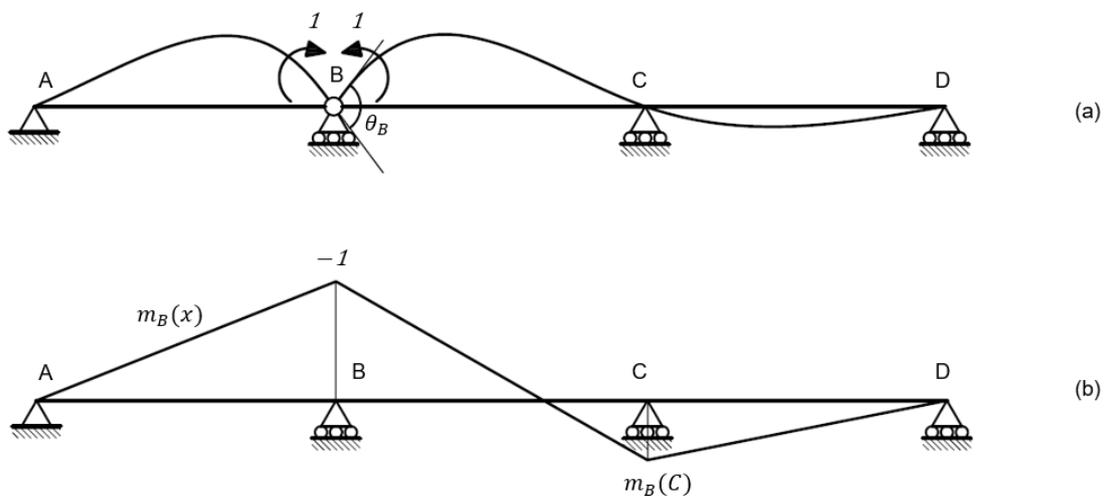


Figura 5-19 – (a) Sistema estrutural após introdução da rótula fictícia e aplicação de um par de momentos unitários no apoio B; (b) Diagrama de momentos fletores $m_B(x)$.

Observa-se que o sistema estrutural da Figura 5-19 pode ser dividido em duas partes: o sistema isostático AB e o sistema hiperestático BCD . Pode-se escrever, assim:

$$|\theta_B| = |\theta_{BA}| + |\theta_{BC}| \quad (5-64)$$

onde θ_{BA} é o ângulo de rotação no apoio B referente ao trecho AB , enquanto θ_{BC} é o ângulo de rotação no mesmo apoio, referente ao segmento BC . O sistema isostático AB é o mesmo descrito no Capítulo 5.1 (Figura 5-3), portanto, o valor de $|\theta_{BA}|$ está definido pela equação (5-13):

$$|\theta_{BA}| = \frac{L_1}{3EI} \quad (5-65)$$

enquanto a expressão de $m_B(\bar{x})$ para o trecho AB é expressa pela equação (5-18).

Resta, assim, se determinar o ângulo θ_{BC} e a expressão para o momento fletor $m_B(\bar{x})$ para a parte hiperestática da estrutura (Figura 5-20).

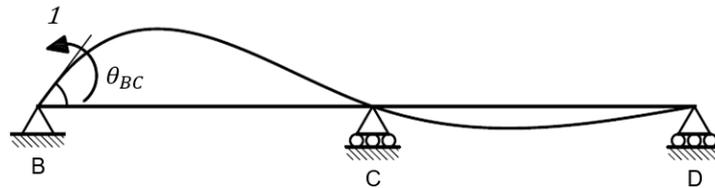


Figura 5-20 - Sistema estrutural hiperestático BCD .

Como a estrutura não possui deslocabilidade externa e possui apenas um grau de deslocabilidade interna D_1 (rotação no apoio C), a aplicação do Método dos Deslocamentos para análise de estruturas hiperestáticas resultará em uma única equação de equilíbrio, de resolução simples.

Restringindo-se, então, a rotação no apoio C pela introdução de uma chapa fictícia, tem-se uma estrutura cinematicamente determinada, denominada sistema hipergeométrico (SH), ilustrado na Figura 5-21.

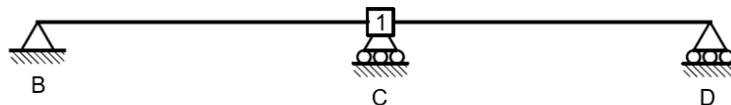


Figura 5-21 – Sistema hipergeométrico para aplicação do Método dos Deslocamentos.

O estado E_0 constitui-se, então, do sistema hipergeométrico sob ação do carregamento atuante, o momento unitário (Figura 5-22).

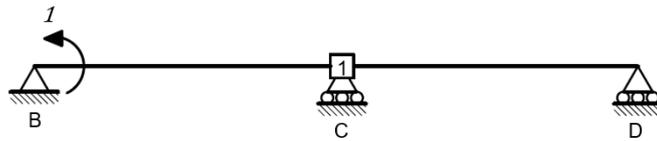


Figura 5-22 - Estado E_0 para aplicação do Método dos Deslocamentos.

O estado E_1 , é representado pelo SH sob ação de um deslocamento unitário $D_1 = 1$ na direção da deslocabilidade restringida, isto é, uma rotação unitária no apoio C (Figura 5-23).

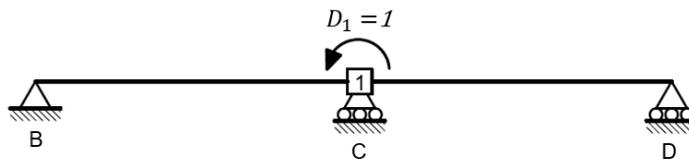


Figura 5-23 - Estado E_1 para aplicação do Método dos Deslocamentos

Como o somatório de momentos externos que atuam no apoio C é nulo, tem-se a seguinte equação de equilíbrio para este nó (TIMOSHENKO e GERE, 1984):

$$\beta_{10} + \beta_{11}D_1 = 0 \quad (5-66)$$

onde

β_{10} é a reação do apoio fictício associado à deslocabilidade restringida D_1 quando atua o carregamento real imposto sobre a estrutura (estado E_0);

β_{11} é o coeficiente de rigidez associado à deslocabilidade restringida D_1 , isto é, a reação do apoio fictício quando atua sobre a estrutura o deslocamento unitário (estado E_1);;

D_1 é o deslocamento rotacional desconhecido no apoio restringido.

Como o coeficiente de transmissão para uma viga engastada de inércia constante é $t = 0,5$ (SÜSSEKIND, 1987), o momento produzido no apoio C pela imposição do momento unitário em B no estado E_0 é:

$$\beta_{10} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (5-67)$$

A rigidez β_{11} pode ser obtida pela soma das rigidezes no ponto C de duas barras apoiadas e engastadas, BC e CD . A equação (5-13) fornece a rotação gerada no apoio de uma barra biapoiada pela aplicação de um momento unitário neste nó, cujo valor é exatamente o inverso da rigidez rotacional em C , definida como o momento gerado pela aplicação de uma rotação unitária no nó. Esta relação é verificada pelo Teorema da Reciprocidade. Assim, obtêm-se as rigidezes de cada barra:

$$k_c^{BC} = k_c^{CD} = \frac{1}{\theta_{AB}} = \frac{3EI}{L} \quad (5-68)$$

Somando-se as rigidezes para o apoio C dos dois trechos da viga:

$$\beta_{11} = k_c^{BC} + k_c^{CD} = \frac{3EI}{L_2} + \frac{3EI}{L_1} \quad (5-69)$$

Aplicando-se, então, as Equações (5-67) e (5-69) em (5-66), obtêm-se:

$$D_1 = -\frac{L_1 \cdot L_2}{6EI(L_1 + L_2)} \quad (5-70)$$

O momento fletor no apoio C é dado, então, pela superposição dos estados E_0 e E_1 , isto é:

$$E = E_0 + E_1 \cdot D_1 \quad (5-71)$$

Obtêm-se, assim:

$$m_B(C) = \frac{1}{2} + k_c^{BC} \cdot D_1 = k_c^{CD} \cdot D_1$$

O que resulta em:

$$m_B(C) = \frac{L_2}{2(L_1 + L_2)} \quad (5-72)$$

Sabendo-se que $m_B(B) = -1$ e que $m_B(D) = 0$ (Figura 5-19), podem-se escrever as expressões para o momento fletor $m_B(x)$ para os trechos BC e CD da viga, respectivamente, em seus referenciais locais:

$$m_B(\bar{x}) = \frac{[m_B(C) + 1]}{L_2} \bar{x} - 1; \quad 0 \leq \bar{x} \leq L_2 \quad (5-73)$$

$$m_B(\bar{x}) = m_B(C) - \frac{m_B(C)}{L_1} \bar{x}; \quad 0 \leq \bar{x} \leq L_1 \quad (5-74)$$

Para se obter, então, o ângulo de rotação da viga θ_{BC} , será aplicado o Método da Carga Unitária. Como a configuração de momentos fletores reais $m_B(x)$ é gerada exatamente pela aplicação de uma carga unitária, M_U coincide com $m_B(x)$, logo, vale a equação (5-8):

$$\theta_{BC} = \int_0^{L_1} \frac{m_B(x) \cdot m_B(x)}{EI} dx \quad (5-75)$$

Substituindo-se (5-73) e (5-74) em (5-75):

$$\theta_{BC} = \frac{1}{EI} \left(\int_0^{L_2} \left\{ \frac{[m_B(C) + 1]}{L_2} \bar{x} - 1 \right\}^2 d\bar{x} + \int_0^{L_1} \left[m_B(C) - \frac{m_B(C)}{L_1} \bar{x} \right]^2 d\bar{x} \right)$$

Após integração e simplificações, tem-se:

$$|\theta_{BC}| = \frac{1}{3EI} [(L_1 + L_2)m_B(C)^2 + L_2(1 - m_B(C))] \quad (5-76)$$

Substituindo-se (5-72) em (5-76), obtém-se a expressão para o ângulo de rotação θ_{BC} em função dos comprimentos dos vãos L_1 e L_2 :

$$|\theta_{BC}| = \frac{L_2(4L_1 + 3L_2)}{12EI(L_1 + L_2)} \quad (5-77)$$

Por (5-64) e (5-65), tem-se, finalmente:

$$|\theta_B| = \frac{L_1}{3EI} + \frac{L_2(4L_1 + 3L_2)}{12EI(L_1 + L_2)} \quad (5-78)$$

Assim, a única parcela que resta ser determinada da equação (5-63) é a expressão para o momento isostático $M_{iso}(x)$. Para isso, novamente, como no item 5.3, a protensão será dividida em duas partes: uma com variação linear a outra parabólica. As parcelas lineares do traçado do cabo são descritas, para os vãos AB e CD , respectivamente, por (5-49) e (5-50). Para o vão BC tem-se apenas a excentricidade constante e .

Desta forma, obtém-se as seguintes expressões para a parcela linear da excentricidade do traçado do cabo segundo o referencial de cada vão:

$$y_l(\bar{x}) = -\frac{e}{L_1}\bar{x}; \quad 0 \leq \bar{x} < L_1 \quad (5-79)$$

$$y_l(\bar{x}) = -e; \quad 0 \leq \bar{x} < L_2 \quad (5-80)$$

$$y_l(\bar{x}) = -\frac{e}{L_1}(L_1 - \bar{x}); \quad 0 \leq \bar{x} < L_1 \quad (5-81)$$

para os trechos *AB*, *CB* e *CD* da viga, respectivamente, em seus referenciais locais.

As parcelas parabólicas de $y(x)$ podem ser escritas a partir da equação (5-55):

$$y_p(\bar{x}) = f_1 - \frac{4f_1}{L_1^2}\left(\bar{x} - \frac{L_1}{2}\right)^2; \quad 0 \leq \bar{x} \leq L_1 \quad (5-82)$$

$$y_p(\bar{x}) = f_2 - \frac{4f_2}{L_2^2}\left(\bar{x} - \frac{L_2}{2}\right)^2; \quad 0 \leq \bar{x} \leq L_2 \quad (5-83)$$

$$y_p(\bar{x}) = f_1 - \frac{4f_1}{L_1^2}\left(\bar{x} - \frac{L_1}{2}\right)^2; \quad 0 \leq \bar{x} \leq L_1 \quad (5-84)$$

para os trechos *AB*, *CB* e *CD* da viga, respectivamente, em seus referenciais locais.

Por (5-43), têm-se, então, as expressões finais para a excentricidade do traçado do cabo:

$$y(\bar{x}) = -\frac{e}{L_1}\bar{x} + f_1 - \frac{4f_1}{L_1^2}\left(\bar{x} - \frac{L_1}{2}\right)^2; \quad 0 \leq \bar{x} \leq L_1 \quad (5-85)$$

$$y(\bar{x}) = -e + f_2 - \frac{4f_2}{L_2^2}\left(\bar{x} - \frac{L_2}{2}\right)^2; \quad 0 \leq \bar{x} \leq L_2 \quad (5-86)$$

$$y(\bar{x}) = -\frac{e}{L_1}(L_1 - \bar{x}) + f_1 - \frac{4f_1}{L_1^2}\left(\bar{x} - \frac{L_1}{2}\right)^2; \quad 0 \leq \bar{x} \leq L_1 \quad (5-87)$$

Assumindo-se que os ângulos de inclinação do cabo de protensão ao longo da viga possuem pequena magnitude, vale a equação (2-6). Ficam definidas, então, as expressões para o momento isostático de protensão para cada vão da viga (Figura 5-24).

$$M_{iso}(\bar{x}) = P \left[\frac{e}{L_1}\bar{x} - f_1 + \frac{4f_1}{L_1^2}\left(\bar{x} - \frac{L_1}{2}\right)^2 \right]; \quad 0 \leq \bar{x} \leq L_1 \quad (5-88)$$

$$M_{iso}(\bar{x}) = P \left[e - f_2 + \frac{4f_2}{L_2^2}\left(\bar{x} - \frac{L_2}{2}\right)^2 \right]; \quad 0 \leq \bar{x} \leq L_2 \quad (5-89)$$

$$M_{iso}(\bar{x}) = P \left[\frac{e}{L_1}(L_1 - \bar{x}) - f_1 + \frac{4f_1}{L_1^2}\left(\bar{x} - \frac{L_1}{2}\right)^2 \right]; \quad 0 \leq \bar{x} \leq L_1 \quad (5-90)$$

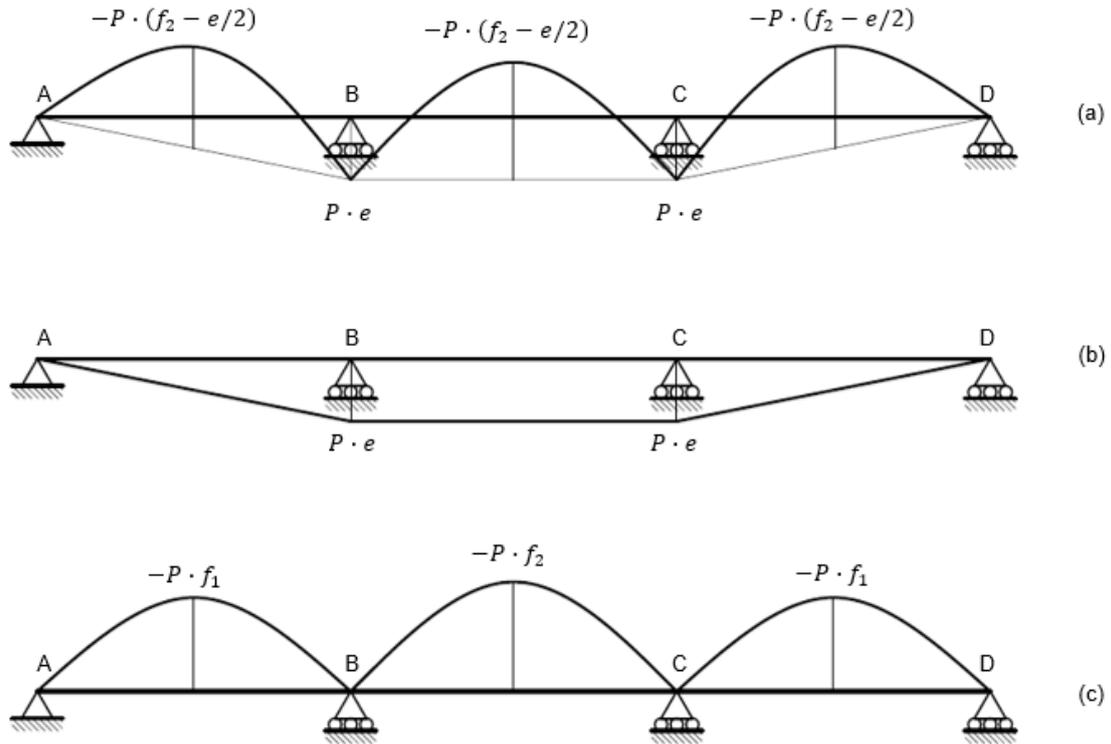


Figura 5-24 – (a) Diagrama de momentos fletores isostáticos de protensão $M_{iso}(x)$; (b) Parcela linear do diagrama $M_{iso}(x)$; (c) Parcela parabólica do diagrama $M_{iso}(x)$.

Sendo o ângulo $|\theta_B|$ dado pela equação (5-78), o momento fletor $m_B(x)$ dado pelas Equações (5-18), (5-73) e (5-74) e o momento $M_{iso}(x)$ por (5-88), (5-89), e (5-90), respectivamente para os trechos AB , BC e CD da estrutura, podem-se solucionar as integrais da equação (5-63):

$$\int_{AB} M_{iso}(\bar{x}) \cdot m_B(\bar{x}) d\bar{x} = \int_0^{L_1} P \left[\frac{e}{L_1} \bar{x} - f_1 + \frac{4f_1}{L_1^2} \left(\bar{x} - \frac{L_1}{2} \right)^2 \right] \left(-\frac{\bar{x}}{L_1} \right) d\bar{x}$$

$$\int_{BC} M_{iso}(\bar{x}) \cdot m_B(\bar{x}) d\bar{x} = \int_0^{L_2} P \left[e - f_2 + \frac{4f_2}{L_2^2} \left(\bar{x} - \frac{L_2}{2} \right)^2 \right] \left[\frac{(m_B(C) + 1)}{L_2} \bar{x} - 1 \right] d\bar{x}$$

$$\int_{CD} M_{iso}(\bar{x}) \cdot m_B(\bar{x}) d\bar{x} = \int_0^{L_1} P \left[\frac{e}{L_1} (L_1 - \bar{x}) - f_1 + \frac{4f_1}{L_1^2} \left(\bar{x} - \frac{L_1}{2} \right)^2 \right] \left[m_B(C) - \frac{m_B(C)}{L_1} \bar{x} \right] d\bar{x}$$

Após integração e simplificações, obtém-se, finalmente:

$$M_{hip}(B) = P \left(\frac{L_1 \cdot f_1 + L_2 \cdot f_1}{L_1 + \frac{3}{2} L_2} - e \right) \quad (5-91)$$

Tem-se, em (5-91), uma expressão geral para determinação do momento hiperestático gerado no apoio interno B em uma viga de três vãos protendida com traçado parabólico sem concordância nos apoios. Sabendo-se que este momento hiperestático apresenta variação linear ao longo da viga e que possui valores nulos nos apoios externos (nas seções externas só atua o momento isostático), pode-se, então, traçar o diagrama de momentos hiperestáticos $M_{hip}(x)$ ao longo da viga (Figura 5-25).

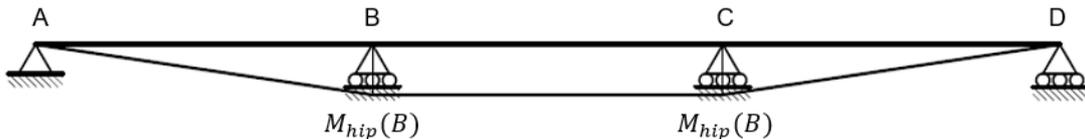


Figura 5-25 - Diagrama de momentos fletores hiperestáticos de protensão $M_{hip}(x)$.

O diagrama de momentos totais da estrutura protendida é, então, obtido pela combinação dos diagramas isostático e hiperestático (Figura 5-26).

$$M_{tot}(B) = P \left(\frac{L_1 \cdot f_1 + L_2 \cdot f_1}{L_1 + \frac{3}{2}L_2} \right) \quad (5-92)$$

Observa-se que esta é a mesma expressão apresentada por THOMAZ (2009) para determinação do momento hiperestático nos apoios internos de uma viga protendida de três vãos com traçado parabólico.

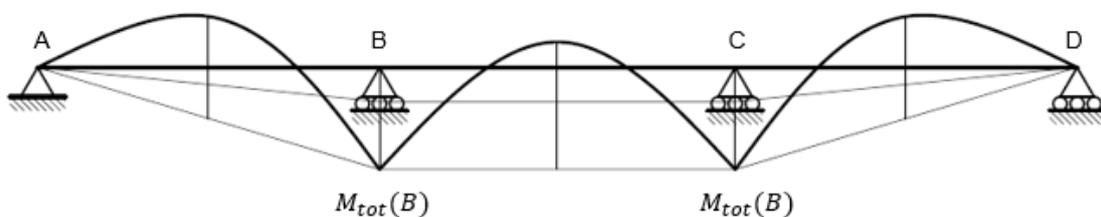


Figura 5-26 – Diagrama de momentos fletores totais de protensão $M_{tot}(x)$.

5.5. Protensão com traçado aproximado por curva *spline*

Desenvolve-se, aqui, um procedimento de cálculo para a determinação do diagrama de momentos fletores hiperestáticos para uma viga protendida com traçado genérico (Figura 5-27). Busca-se, para isso, a expressão para o momento fletor isostático $M_{iso}(x)$.

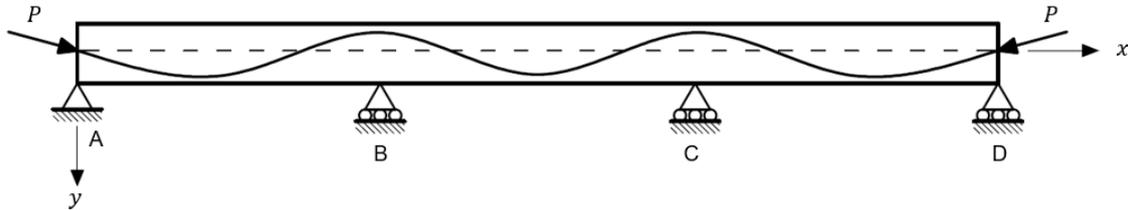


Figura 5-27 – Viga sob protensão de traçado genérico.

O traçado do cabo é aproximado por uma curva *spline*, técnica que consiste em se dividir a curva a ser aproximada em sub-intervalos, onde será realizada interpolação por polinômios.

5.5.1. Aproximação de um traçado por *splines* cúbicas

Supõe-se uma curva genérica, representada na Figura 5-28, dividida em $n - 1$ intervalos, definidos por n pontos de controle. Cada trecho tem seu traçado aproximado por uma função polinomial.

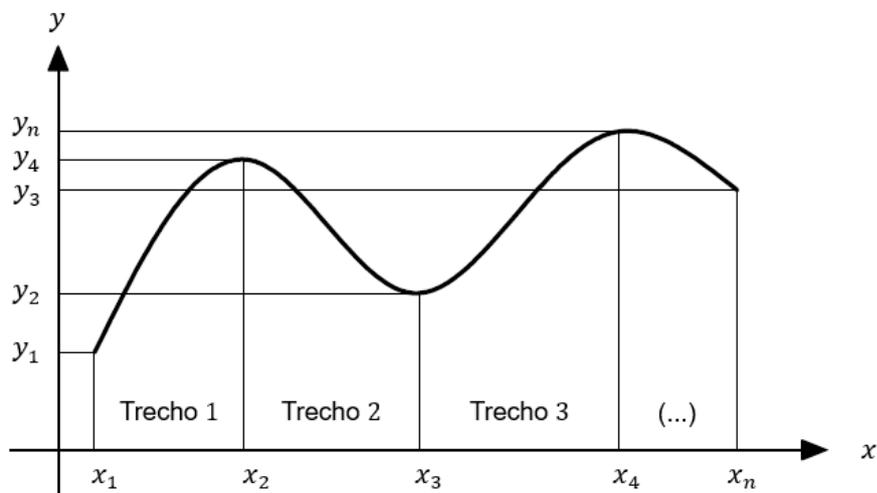


Figura 5-28 – Divisão de uma curva genérica em trechos para aproximação por *spline*.

A Figura 5-29 ilustra um trecho de curva aproximado por *spline*. Para cada intervalo de interpolação definem-se os seguintes parâmetros:

x_i e x_j são as abscissas dos nós inicial e final, respectivamente, do trecho no sistema de coordenadas global da curva;

y_i e y_j são as ordenadas dos nós inicial e final, respectivamente, do trecho no sistema de coordenadas global da curva;

t_i e t_j são as tangentes dos nós inicial e final, respectivamente, do trecho;

$\Delta x_i = x_j - x_i$ é variação de abscissas para o trecho i ;

$\Delta y_i = y_j - y_i$ é variação de ordenadas para o trecho i ;

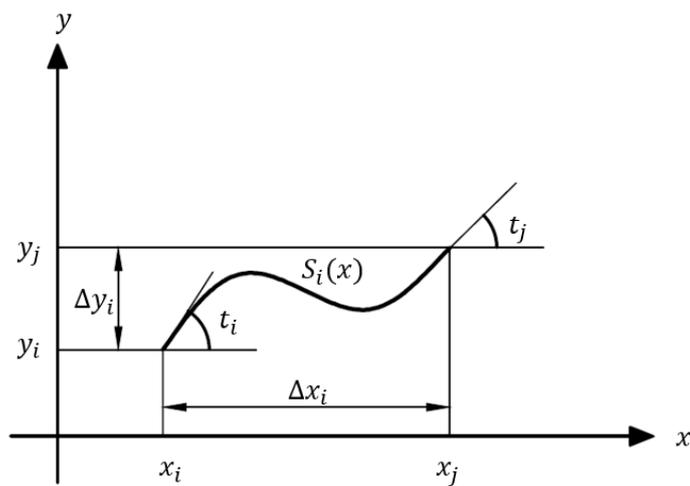


Figura 5-29 – Parâmetros de um trecho de curva aproximado por *spline*.

Adotando-se uma aproximação polinomial de terceiro grau, define-se a expressão para a *spline* no trecho i , em seu referencial local $\bar{x} = x - x_i$:

$$S_i(\bar{x}) = a_i \bar{x}^3 + b_i \bar{x}^2 + c_i \bar{x} + d_i \quad (5-93)$$

onde a_i, b_i, c_i e d_i são os coeficientes da *spline* para o trecho i . Aplicando-se as condições de contorno $S_i(\bar{x} = 0) = y_i$ e $S'(\bar{x} = 0) = t_i$ em (5-93), obtêm-se:

$$c_i = y_i \quad (5-94)$$

$$d_i = t_i \quad (5-95)$$

Aplicando-se as condições de contorno $S_i(\bar{x} = \Delta x_i) = y_j$ e $S'(\bar{x} = \Delta x_i) = t_j$, obtêm-se:

$$a_i \Delta x_i^3 + b_i \Delta x_i^2 = \Delta y_i - \Delta x_i t_i \quad (5-96)$$

$$3a_i \Delta x_i^2 + 2b_i \Delta x_i = t_j - t_i \quad (5-97)$$

Resolvendo-se o sistema de equações, obtêm-se os coeficientes a_i e b_i :

$$a_i = \frac{\Delta t_i}{\Delta x_i^2} + \frac{2(\Delta x_i t_i - \Delta y_i)}{\Delta x_i^3} \quad (5-98)$$

$$b_i = \frac{\Delta t_i}{\Delta x_i} - \frac{3(\Delta x_i t_i - \Delta y_i)}{\Delta x_i^2} \quad (5-99)$$

Para o referencial global da curva, a equação (5-93) pode ser escrita como (ALVES, 2017):

$$S_i(x) = a_i x^3 + \bar{b}_i x^2 + \bar{c}_i x + \bar{d}_i \quad (5-100)$$

onde $x = \bar{x} + x_i$. Os coeficientes para a função no referencial global são definidos por:

$$\bar{b}_i = b_i - 3a_i x_i \quad (5-101)$$

$$\bar{c}_i = c_i + 3a_i x_i^2 - 2b_i x_i \quad (5-102)$$

$$\bar{d}_i = d_i - a_i x_i^3 + b_i x_i^2 - c x_i \quad (5-103)$$

Assim, conhecidas as coordenadas e as tangentes dos nós inicial e final (pontos de controle) de cada trecho, a *spline* fica completamente definida. Observa-se que é garantida a continuidade da primeira derivada (tangente t) entre trechos adjacentes.

Como descreve ALVES (2017), é possível, ainda, se assegurar a continuidade da segunda derivada entre os polinômios que definem a *spline*. Dessa forma, é necessário o conhecimento de apenas duas tangentes da curva, uma vez que as demais são obtidas analiticamente.

Sendo os trechos da *spline* i, j e k adjacentes como ilustrado na Figura 5-30, impõem-se as condições $S_i''(x = x_j) = S_j''(x = x_j)$ em (5-100):

$$S_i''(x) = 6a_i x + 2\bar{b}_i \quad (5-104)$$

o que resulta em:

$$6a_i x_i + 2\bar{b}_i = 6a_j x_j + 2\bar{b}_j \quad (5-105)$$

Substituindo-se as expressões (5-98) e (5-101) em (5-105), obtém-se, após simplificações:

$$\frac{2}{\Delta x_i} t_i + \frac{4(\Delta x_i + \Delta x_j)}{\Delta x_i \Delta x_j} t_j + \frac{2}{\Delta x_j} t_k = 6 \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i^2} + \frac{\Delta y_j}{\Delta x_j^2} \right) \quad (5-106)$$

onde $\Delta x_j = x_k - x_j$ e $\Delta y_j = y_k - y_j$.

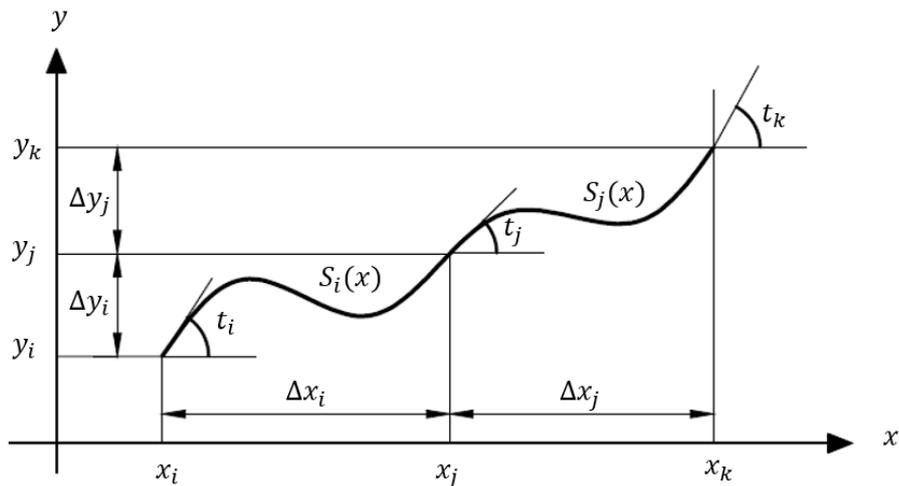


Figura 5-30 – Parâmetros dos trechos adjacentes i, j e k da *spline*.

Desta forma, para uma curva dividida em $n - 1$ intervalos definidos por n pontos de controle, conhecendo-se sua tangente em dois pontos, é possível determinar as demais tangentes a partir de um sistema de $n - 2$ equações definidas pela expressão (5-106). Para o caso particular em que os pontos de controle são igualmente espaçados, sendo $\Delta x_i = \Delta x_j = L$, a equação (5-106) se resume a:

$$t_i + 4t_j + t_k = \frac{3(y_k - y_i)}{L} \quad (5-107)$$

5.5.2. Expressão geral para o hiperestático de protensão

Pela equação (4-27), o hiperestático de protensão no apoio B da estrutura da Figura 5-27 é determinado por:

$$M_{hip}(B) = \frac{1}{|\theta_B|} \sum_i^{n-q} \left(\int_0^L M_{iso}(\bar{x}) \cdot \frac{m_B(\bar{x})}{E \cdot I} d\bar{x} \right) \quad (5-108)$$

Assumindo-se que os ângulos de inclinação do cabo de protensão possuem magnitude pequena, por meio da equação (2-6), o momento isostático em cada intervalo de interpolação pode ser expresso por:

$$M_{iso}(\bar{x}) = -P \cdot S_i(\bar{x}) \quad (5-109)$$

onde $S_i(\bar{x})$ é a *spline* que aproxima o traçado do cabo no trecho i , em seu referencial local.

Considerando-se que a força de protensão P tem valor constante ao longo da viga, obtém-se:

$$M_{hip}(B) = -\frac{P}{|\theta_B|} \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^L S_i(\bar{x}) \cdot \frac{m_B(\bar{x})}{E \cdot I} d\bar{x} \quad (5-110)$$

Diferentemente do que se fez até o item 5.4, as integrações não serão realizadas para cada vão, mas sim para cada trecho de *spline*, em seus referenciais locais. Dessa forma, o somatório da equação (5-110) é realizado para os $n - 1$ intervalos de interpolação da *spline*.

Assim, sendo g_i e g_j as ordenadas inicial e final de $m_B(x)$ para o intervalo de integração i (Figura 5-31), a função que descreve o momento fletor neste trecho pode ser escrita como:

$$m_B(\bar{x}) = g_i + \frac{(g_j - g_i)}{\Delta x_i} \bar{x} \quad (5-111)$$

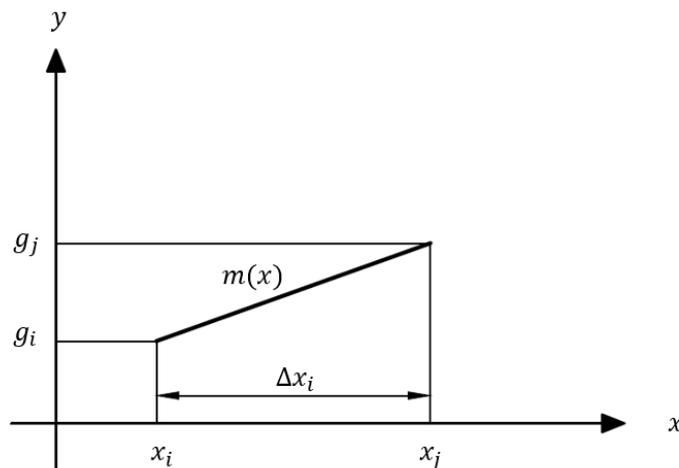


Figura 5-31 – Trecho da função $m_B(\bar{x})$ definido pelos seus valores inicial e final g_i e g_j .

Aplicando as equações (5-93) e (5-111) em (5-110), obtém-se, após simplificações, a expressão para hiperestático no apoio B :

$$M_{hip}(B) = -\frac{P}{60|\theta_B|EI} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i \{g_i[3(7y_i + 3y_j) + (3t_i - 2t_j)\Delta x_i] + g_j[3(3y_i + 7y_j) + (2t_i - 3t_j)\Delta x_i]\} \quad (5-112)$$

onde, para as vigas de dois vãos, $|\theta_B|$ é dado pela equação (5-15) e $m_B(\bar{x})$ é dado por (5-12) e (5-18), enquanto que para as vigas de três vãos, $|\theta_B|$ é dado pela equação (5-78) e $m_B(\bar{x})$ é dado por (5-12), (5-73) e (5-74). Tem-se, portanto, em (5-112) uma expressão geral para a determinação de momentos fletores hiperestáticos de protensão com traçado genérico para vigas de dois e três vãos.

5.5.1. Hiperestático de protensão em vigas de dois vãos

5.5.1.1. Excentricidade máxima no meio do vão

Define-se o sistema estrutural ilustrado na Figura 5-32, uma viga assimétrica protendida de dois vãos, onde a excentricidade máxima se localiza no ponto médio de cada vão. Os comprimentos dos vãos da viga são L_1 e L_2 , como ilustrado. Denotam-se por e_i e e_s as excentricidades máximas inferiores e superiores do cabo, respectivamente.

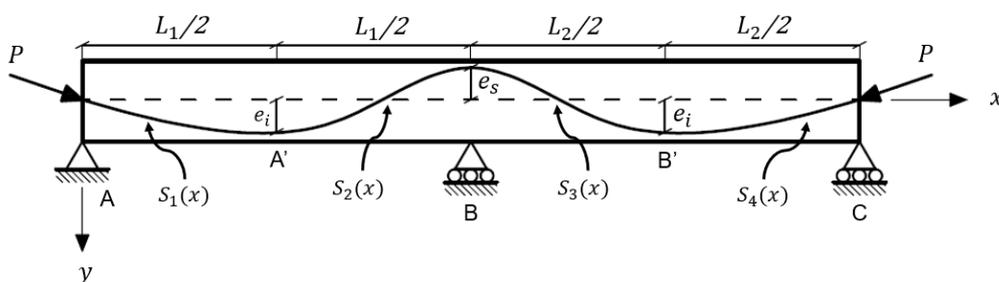


Figura 5-32 – Viga protendida de dois vãos.

O traçado é aproximado por quatro segmentos de *spline*, denotadas $S_1(\bar{x})$, $S_2(\bar{x})$, $S_3(\bar{x})$ e $S_4(\bar{x})$, cada qual com os seus respectivos referenciais locais (Figura 5-33). Assumem-se polinômios de segundo grau (parábolas) para $S_1(\bar{x})$ e $S_4(\bar{x})$ e polinômios de terceiro grau para as demais funções.

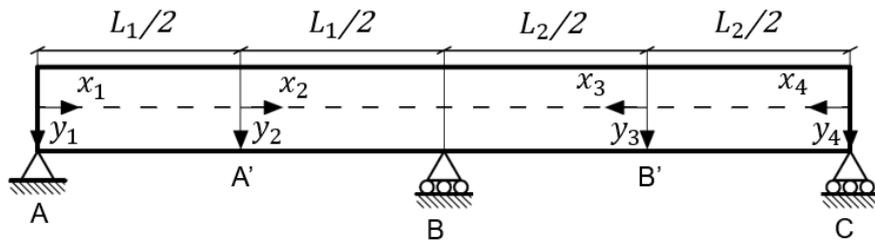


Figura 5-33 – Referenciais locais para a viga.

A partir das condições de contorno para $S_1(\bar{x})$:

$$S_1(0) = 0 \quad (5-113)$$

$$S_1\left(\frac{L_1}{2}\right) = e_i \quad (5-114)$$

$$S_1'\left(\frac{L_1}{2}\right) = 0 \quad (5-115)$$

obtem-se a função:

$$S_1(\bar{x}) = \frac{4e_i}{L_1^2} (L_1 - \bar{x})\bar{x} \quad (5-116)$$

onde $0 \leq \bar{x} \leq \frac{L_1}{2}$.

Para a segunda função, aplicam-se as condições:

$$S_2(0) = e_i \quad (5-117)$$

$$S_2'(0) = 0 \quad (5-118)$$

$$S_2'\left(\frac{L_1}{2}\right) = 0 \quad (5-119)$$

$$S_2\left(\frac{L_1}{2}\right) = -e_s \quad (5-120)$$

obtendo-se a função:

$$S_2(\bar{x}) = \frac{16(e_i + e_s)}{L_1^3} \bar{x}^3 - \frac{12(e_i + e_s)}{L_1^2} \bar{x}^2 + e_i \quad (5-121)$$

onde $0 \leq \bar{x} \leq \frac{L_1}{2}$.

Analogamente, têm-se as condições de contorno para a terceira *spline*:

$$S_3(0) = e_i \quad (5-122)$$

$$S_3'(0) = 0 \quad (5-123)$$

$$S_3'\left(\frac{L_2}{2}\right) = 0 \quad (5-124)$$

$$S_3\left(\frac{L_2}{2}\right) = -e_s \quad (5-125)$$

o que resulta na função:

$$S_3(\bar{x}) = \frac{16(e_i + e_s)}{4L_2^3} \bar{x}^3 - \frac{12(e_i + e_s)}{4L_2^2} \bar{x}^2 + e_i \quad (5-126)$$

onde $0 \leq \bar{x} \leq \frac{L_2}{2}$.

E, finalmente, para a quarta curva, aplicam-se as seguintes condições:

$$S_4(0) = 0 \quad (5-127)$$

$$S_4\left(\frac{L_2}{2}\right) = e_i \quad (5-128)$$

$$S_4'\left(\frac{L_2}{3}\right) = 0 \quad (5-129)$$

resultando na função:

$$S_4(\bar{x}) = \frac{4e_i}{L_2^2} (L_1 - \bar{x}) \bar{x} \quad (5-130)$$

onde $0 \leq \bar{x} \leq \frac{L_2}{2}$.

A partir de (5-12) e (5-18), determinam-se as expressões que caracterizam o momento fletor $m_B(\bar{x})$ no referencial local de cada trecho:

$$m_1(\bar{x}) = -\frac{\bar{x}}{L_1} \quad (5-131)$$

$$m_2(\bar{x}) = -\frac{(\bar{x} + L_1/2)}{L_1} \quad (5-132)$$

$$m_3(\bar{x}) = -\frac{(\bar{x} + L_2/2)}{L_2} \quad (5-133)$$

$$m_4(\bar{x}) = -\frac{\bar{x}}{L_2} \quad (5-134)$$

Para o cálculo do momento fletor hiperestático, solucionam-se as integrais, expressas na equação (5-110), para os trechos definidos na Figura 5-33:

$$\int_0^{L_1/2} S_1 \cdot m_1 dx = -\frac{5L_1 e_i}{48} \quad (5-135)$$

$$\int_0^{L_1/2} S_2 \cdot m_2 dx = -\frac{L_1(13e_i - 17e_s)}{80} \quad (5-136)$$

$$\int_0^{L_2/2} S_3 \cdot m_3 dx = -\frac{L_2(13e_i - 17e_s)}{80} \quad (5-137)$$

$$\int_0^{L_2/2} S_4 \cdot m_4 dx = -\frac{5L_2 e_i}{48} \quad (5-138)$$

O somatório das parcelas resultantes das integrações realizadas em (5-135), (5-136), (5-137) e (5-138) é dado por:

$$\sum_{i=1}^4 \int_0^L S_i(\bar{x}) \cdot m_B(\bar{x}) d\bar{x} = -\frac{(64e_i - 51e_s)(L_1 + L_2)}{240} \quad (5-139)$$

Substituindo-se (5-15) e (5-139) em (5-110), obtém-se, após simplificações:

$$M_{hip}(B) = \frac{P(64e_i - 51e_s)}{80} \quad (5-140)$$

Tem-se, portanto, em (5-140), uma expressão para a determinação prática do momento fletor hiperestático no apoio interno de uma viga de dois vãos, considerando-se que a excentricidade máxima do cabo ocorre no ponto médio de cada vão.

Para o caso particular em que $e_i = e_s = e$, típico de vigas retangulares, a equação (5-140) resulta em:

$$M_{hip}(B) = \frac{13Pe}{80} \quad (5-141)$$

Observa-se, assim, que o momento fletor hiperestático de protensão em uma viga de dois vãos independe dos vãos L_1 e L_2 .

Definindo-se, então, o parâmetro adimensional $\mu = e_i/e_s$, tem-se, a partir de (5-140), a relação:

$$\frac{M_{hip}(B)}{P \cdot e_s} = \frac{64\mu - 51}{80} \quad (5-142)$$

Por (2-6), o momento fletor isostático no apoio B da viga é expresso por:

$$M_{iso}(B) = P \cdot e_s \quad (5-143)$$

Assim, a expressão (5-142) fornece a relação entre os momentos fletores hiperestático e isostático no apoio B da viga:

$$\frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{64\mu - 51}{80} \quad (5-144)$$

Com a equação (5-144) pode-se estimar, para fins de pré-dimensionamento, o momento fletor hiperestático no apoio central da estrutura onde e_i ocorre no ponto médio de cada vão. O gráfico da Figura 5-34 ilustra a variação do momento fletor hiperestático a partir da variação de μ .

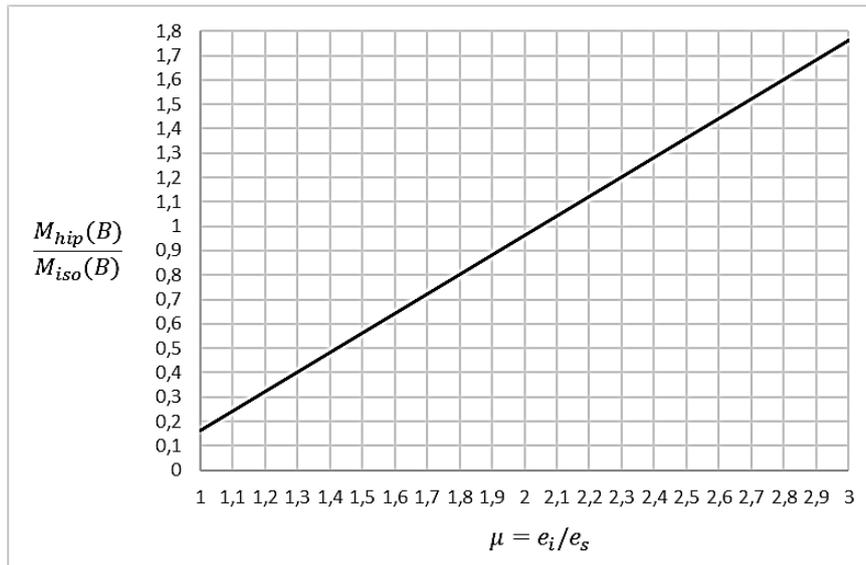


Figura 5-34 - Momento fletor hiperestático no apoio central de uma viga de dois vãos onde e_i ocorre no ponto médio de cada vão.

5.5.1.2. Excentricidade máxima no terço do vão

Define-se o sistema estrutural ilustrado na Figura 5-35, de uma viga assimétrica protendida de dois vãos, onde a excentricidade máxima localiza-se em $L/3$, próximo aos apoios externos. Os comprimentos dos vãos da viga são L_1 e L_2 , como ilustrado. Denotam-se por e_i e e_s as excentricidades máximas inferiores e superiores do cabo, respectivamente.

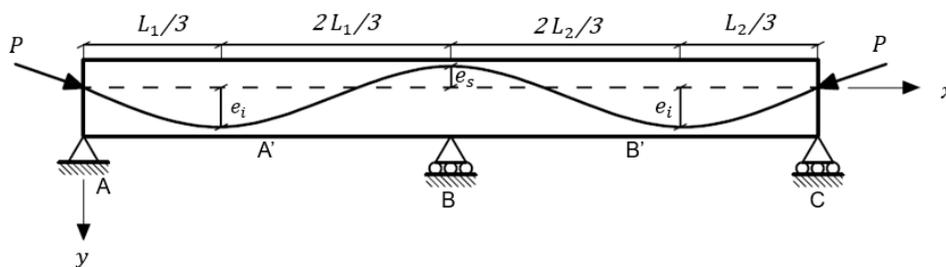


Figura 5-35 - Viga protendida de dois vãos.

Como no item 5.5.1.1, este traçado é aproximado por quatro segmentos de *spline*, denotadas $S_1(\bar{x}), S_2(\bar{x}), S_3(\bar{x})$ e $S_4(\bar{x})$, cada qual com seus respectivos referenciais locais (Figura 5-36). Assumem-se polinômios de segundo grau (parábolas) para $S_1(\bar{x})$ e $S_4(\bar{x})$ e polinômios de terceiro grau para as demais funções.

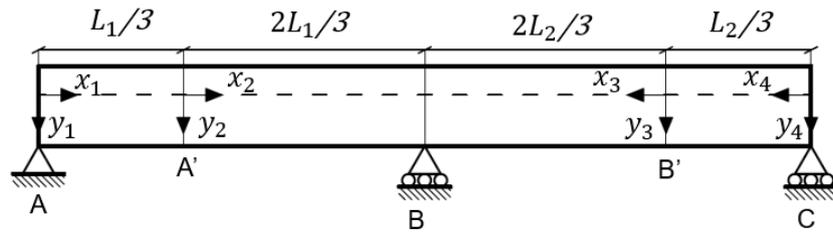


Figura 5-36 – Referenciais locais para a viga.

A partir das condições de contorno para $S_1(\bar{x})$:

$$S_1(0) = 0 \quad (5-145)$$

$$S_1\left(\frac{L_1}{3}\right) = e_i \quad (5-146)$$

$$S_1'\left(\frac{L_1}{3}\right) = 0 \quad (5-147)$$

obtém-se a função:

$$S_1(\bar{x}) = \frac{3e_i}{L_1^2} (2L_1 - 3\bar{x})\bar{x} \quad (5-148)$$

onde $0 \leq \bar{x} \leq \frac{L_1}{3}$.

Para a segunda função, aplicam-se as condições:

$$S_2(0) = e_i \quad (5-149)$$

$$S_2'(0) = 0 \quad (5-150)$$

$$S_2'\left(\frac{2L_1}{3}\right) = 0 \quad (5-151)$$

$$S_2\left(\frac{2L_1}{3}\right) = -e_s \quad (5-152)$$

obtendo-se a função:

$$S_2(\bar{x}) = \frac{27(e_i + e_s)}{4L_1^3} \bar{x}^3 - \frac{27(e_i + e_s)}{4L_1^2} \bar{x}^2 + e_i \quad (5-153)$$

onde $0 \leq \bar{x} \leq \frac{2L_1}{3}$.

Analogamente, têm-se as condições de contorno para a terceira *spline*:

$$S_3(0) = e_i \quad (5-154)$$

$$S_3'(0) = 0 \quad (5-155)$$

$$S_3'\left(\frac{2L_2}{3}\right) = 0 \quad (5-156)$$

$$S_3\left(\frac{2L_2}{3}\right) = -e_s \quad (5-157)$$

o que resulta na função:

$$S_3(\bar{x}) = \frac{27(e_i + e_s)}{4L_2^3} \bar{x}^3 - \frac{27(e_i + e_s)}{4L_2^2} \bar{x}^2 + e_i \quad (5-158)$$

onde $0 \leq \bar{x} \leq \frac{2L_2}{3}$.

Finalmente, para a quarta curva, aplicam-se as condições:

$$S_4(0) = 0 \quad (5-159)$$

$$S_4\left(\frac{L_2}{2}\right) = e_i \quad (5-160)$$

$$S_4'\left(\frac{L_2}{3}\right) = 0 \quad (5-161)$$

resultando na função:

$$S_4(\bar{x}) = \frac{3e_i}{L_2^2} (2L_1 - 3\bar{x})\bar{x} \quad (5-162)$$

onde $0 \leq \bar{x} \leq \frac{L_2}{3}$.

A partir de (5-12) e (5-18), determinam-se as expressões que caracterizam o momento fletor $m_B(\bar{x})$ no referencial local de cada trecho:

$$m_1(\bar{x}) = -\frac{\bar{x}}{L_1} \quad (5-163)$$

$$m_2(\bar{x}) = -\frac{(\bar{x} + L_1/3)}{L_1} \quad (5-164)$$

$$m_3(\bar{x}) = -\frac{(\bar{x} + L_2/3)}{L_2} \quad (5-165)$$

$$m_4(\bar{x}) = -\frac{\bar{x}}{L_2} \quad (5-166)$$

Para o cálculo do momento fletor hiperestático, solucionam-se as integrais, expressas na equação (5-110), para os trechos definidos na Figura 5-36:

$$\int_0^{L_1/3} S_1 \cdot m_1 dx = -\frac{5L_1 e_i}{108} \quad (5-167)$$

$$\int_0^{2L_1/3} S_2 \cdot m_2 dx = -\frac{4L_1(2e_i - 3e_s)}{45} \quad (5-168)$$

$$\int_0^{2L_2/3} S_3 \cdot m_3 dx = -\frac{4L_2(2e_i - 3e_s)}{45} \quad (5-169)$$

$$\int_0^{L_2/3} S_4 \cdot m_4 dx = -\frac{5L_2 e_i}{108} \quad (5-170)$$

O somatório das parcelas resultantes das integrações realizadas em (5-167), (5-168), (5-169) e (5-170) é dado por:

$$\sum_{i=1}^4 \int_0^L S_i(\bar{x}) \cdot m_B(\bar{x}) d\bar{x} = -\frac{(121e_i - 144e_s)(L_1 + L_2)}{540} \quad (5-171)$$

Substituindo-se (5-15) e (5-171) em (5-110), obtém-se, após simplificações:

$$M_{hip}(B) = \frac{P(121e_i - 144e_s)}{180} \quad (5-172)$$

Tem-se, portanto, em (5-172), uma expressão para a determinação prática do momento fletor hiperestático no apoio interno de uma viga de dois vãos, considerando-se que a excentricidade máxima do cabo ocorre a $L/3$ dos apoios externos.

Para o caso particular em que $e_i = e_s = e$, típico de vigas retangulares, a equação (5-172) resulta em:

$$M_{hip}(B) = -\frac{23Pe}{180} \quad (5-173)$$

De forma análoga ao item anterior, define-se o parâmetro $\mu = e_i/e_s$ e obtém-se, a partir de (5-172), a relação:

$$\frac{M_{hip}(B)}{P \cdot e_s} = \frac{121\mu - 144}{180} \quad (5-174)$$

O momento fletor isostático no apoio B é expresso por (5-143). Assim, a equação (5-174) fornece a razão entre os momentos fletores hiperestático e isostático no apoio B da viga:

$$\frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{121\mu - 144}{180} \quad (5-175)$$

Com a equação (5-175) pode-se estimar, para fins de pré-dimensionamento, o momento fletor hiperestático no apoio central da estrutura onde e_i ocorre no terço de cada vão. O gráfico da Figura 5-37 ilustra a variação do momento fletor hiperestático a partir da variação de μ .

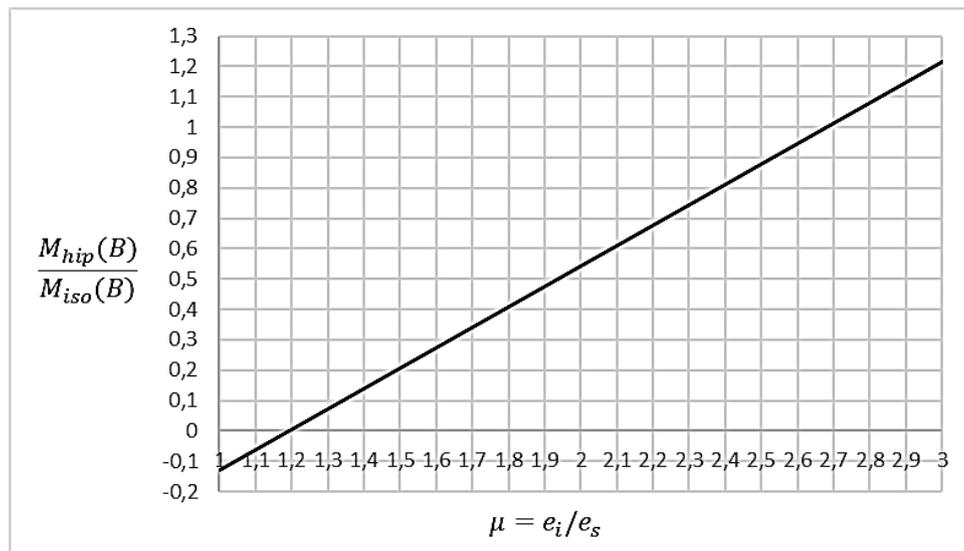


Figura 5-37 - Momento hiperestático no apoio central de uma viga de dois vãos onde e_i ocorre no terço de cada vão.

5.5.2. Hiperestático de protensão em vigas de três vãos

5.5.2.1. Excentricidade máxima no meio do vão

Define-se o sistema estrutural, ilustrado na Figura 5-38, de uma viga simétrica de três vãos sob protensão onde a excentricidade máxima do cabo nos vãos externos localiza-se no ponto médio de cada vão. Os comprimentos dos vãos externos da viga são L_1 e do vão interno é L_2 , como ilustrado. Denotam-se por e_i e e_s as excentricidades máximas inferiores e superiores do cabo, respectivamente.

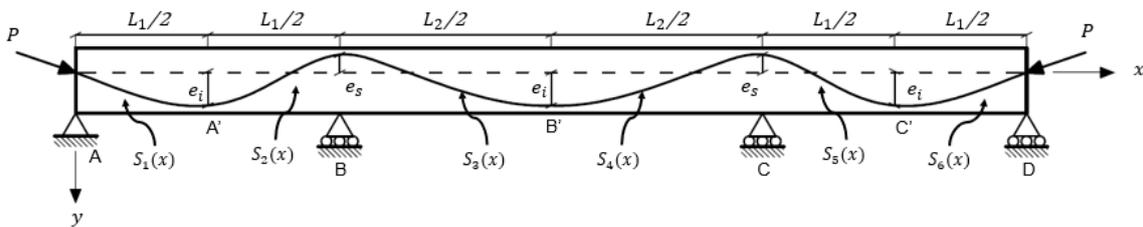


Figura 5-38 - Viga protendida de três vãos.

Este traçado é aproximado por seis segmentos de *spline*, denotadas $S_1(\bar{x})$, $S_2(\bar{x})$, $S_3(\bar{x})$, $S_4(\bar{x})$, $S_5(\bar{x})$ e $S_6(\bar{x})$, cada qual com os seus respectivos referenciais locais (Figura 5-42). Assumem-se, em seguida, polinômios de segundo grau (parábolas) para $S_1(\bar{x})$ e $S_6(\bar{x})$ e polinômios de terceiro grau para as demais funções.

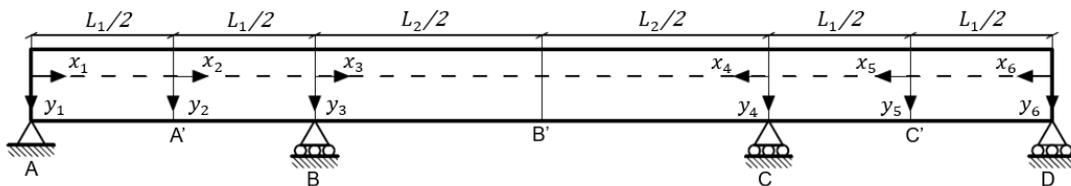


Figura 5-39 – Referenciais locais para a viga.

A expressão que define a função $S_1(\bar{x})$, deduzida no item 5.5.1.1, em (5-116), é dada por:

$$S_1(\bar{x}) = \frac{4e_i}{L_1^2} (L_1 - \bar{x})\bar{x} \quad (5-176)$$

onde $0 \leq \bar{x} \leq \frac{L_1}{2}$.

A função $S_2(\bar{x})$ é definida por (5-126):

$$S_2(\bar{x}) = \frac{16(e_i + e_s)}{L_1^3} \bar{x}^3 - \frac{12(e_i + e_s)}{L_1^2} \bar{x}^2 + e_i \quad (5-177)$$

onde $0 \leq \bar{x} \leq \frac{L_1}{2}$.

Aplicando-se a condições de contorno para a terceira *spline*:

$$S_3(0) = -e_s \quad (5-178)$$

$$S_3'(0) = 0 \quad (5-179)$$

$$S_3'\left(\frac{L_2}{2}\right) = 0 \quad (5-180)$$

$$S_3\left(\frac{L_2}{2}\right) = e_i \quad (5-181)$$

obtem-se:

$$S_3(\bar{x}) = -\frac{16(e_i + e_s)}{4L_2^3} \bar{x}^3 + \frac{12(e_i + e_s)}{4L_2^2} \bar{x}^2 - e_s \quad (5-182)$$

onde $0 \leq \bar{x} \leq \frac{L_2}{2}$.

As demais curvas são expressas por:

$$S_4(\bar{x}) = S_3(\bar{x}) \quad (5-183)$$

$$S_5(\bar{x}) = S_2(\bar{x}) \quad (5-184)$$

$$S_6(\bar{x}) = S_1(\bar{x}) \quad (5-185)$$

A partir de (5-12), (5-73) e (5-74), determinam-se as expressões que caracterizam o momento fletor $m_B(\bar{x})$ no referencial local de cada trecho:

$$m_1(\bar{x}) = -\frac{\bar{x}}{L_1} \quad (5-186)$$

$$m_2(\bar{x}) = -\frac{(\bar{x} + L_1/2)}{L_1} \quad (5-187)$$

$$m_3(\bar{x}) = -1 + \frac{(2L_1 + 3L_2)}{2L_2(L_1 + L_2)} \bar{x} \quad (5-188)$$

$$m_4(\bar{x}) = \frac{L_2}{2(L_1 + L_2)} - \frac{(2L_1 + 3L_2)}{2L_2(L_1 + L_2)} \bar{x} \quad (5-189)$$

$$m_5(\bar{x}) = \frac{L_2}{2L_1(L_1 + L_2)} \left(\bar{x} + \frac{L_1}{2} \right) \quad (5-190)$$

$$m_6(\bar{x}) = \frac{L_2}{2L_1(L_1 + L_2)} \bar{x} \quad (5-191)$$

Para o cálculo do momento fletor hiperestático, solucionam-se as integrais, expressas na equação (5-110), para os trechos definidos na Figura 5-39:

$$\int_0^{L_1/2} S_1 \cdot m_1 dx = -\frac{5L_1 e_i}{48} \quad (5-192)$$

$$\int_0^{L_1/2} S_2 \cdot m_2 dx = -\frac{L_1(13e_i - 17e_s)}{80} \quad (5-193)$$

$$\int_0^{L_2/2} S_3 \cdot m_3 dx = -\frac{L_2[2L_1(13e_i - 17e_s) + L_2(19e_i - 31e_s)]}{160(L_1 + L_2)} \quad (5-194)$$

$$\int_0^{L_2/2} S_4 \cdot m_4 dx = -\frac{L_2[2L_1(7e_i - 3e_s) + L_2(e_i + 4e_s)]}{160(L_1 + L_2)} \quad (5-195)$$

$$\int_0^{L_1/2} S_5 \cdot m_5 dx = \frac{L_1 L_2 (13e_i - 17e_s)}{160(L_1 + L_2)} \quad (5-196)$$

$$\int_0^{L_1/2} S_5 \cdot m_5 dx = \frac{5L_1 L_2 e_i}{96(L_1 + L_2)} \quad (5-197)$$

O somatório das parcelas resultantes das integrações realizadas em (5-192), (5-193), (5-194), (5-195), (5-196) e (5-197) é dado por:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \int_0^L S_i \cdot m_B d\bar{x} &= \\ &= -\frac{L_2^2(4e_i + 9e_s)}{480(L_1 + L_2)} - \frac{L_1(64e_i - 51e_s)}{240} - \frac{L_2(56e_i - 69e_s)}{480} \end{aligned} \quad (5-198)$$

Substituindo-se (5-78) e (5-198) em (5-110), obtém-se, após simplificações:

$$M_{hip}(B) = P \left[\frac{L_1(64e_i - 51e_s) + 60L_2(e_i - e_s)}{40(2L_1 + 3L_2)} \right] \quad (5-199)$$

Tem-se, em (5-199), uma expressão para a determinação prática do momento fletor hiperestático no apoio interno de uma viga de três vãos, considerando-se que a excentricidade máxima do cabo nos vãos externos ocorre no ponto médio de cada vão.

Para o caso particular em que $e_i = e_s = e$, típico de vigas retangulares, a equação (5-199) resulta em:

$$M_{hip}(B) = \frac{13PL_1e}{40(2L_1 + 3L_2)} \quad (5-200)$$

Definindo-se os parâmetros adimensionais $\mu = e_i/e_s$ e $\lambda = L_2/L_1$, tem-se, a partir de (5-199), a relação:

$$\frac{M_{hip}(B)}{P \cdot e_s} = \frac{60\lambda(\mu - 1) + 64\mu - 51}{40(3\lambda + 2)} \quad (5-201)$$

O momento fletor isostático no apoio B é expresso por (5-36). Assim, a equação (5-201) fornece a razão entre os momentos fletores hiperestático e isostático nesta seção da viga:

$$\frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{60\lambda(\mu - 1) + 64\mu - 51}{40(3\lambda + 2)} \quad (5-202)$$

Atribuindo-se valores usuais para λ , obtém-se, em seguida, as respectivas expressões para $M_{hip}(B)/M_{iso}(B)$:

$$\lambda = 1 \rightarrow \frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{124\mu - 111}{200} \quad (5-203)$$

$$\lambda = 1,2 \rightarrow \frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{136\mu - 123}{224} \quad (5-204)$$

$$\lambda = 1,4 \rightarrow \frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{148\mu - 135}{248} \quad (5-205)$$

$$\lambda = 1,6 \rightarrow \frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{160\mu - 147}{272} \quad (5-206)$$

$$\lambda = 1,8 \rightarrow \frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{172\mu - 159}{296} \quad (5-207)$$

$$\lambda = 2 \rightarrow \frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{184\mu - 171}{320} \quad (5-208)$$

Desta forma, pode-se estimar para fins de pré-dimensionamento, o momento hiperestático nos apoios internos da estrutura a partir do ábaco da Figura 5-40. Observa-se que, para valores de μ próximos de 1, o momento fletor hiperestático apresenta variações de pequena magnitude, conforme se varia λ . A influência do parâmetro λ se intensifica quando a razão e_i/e_s aumenta.

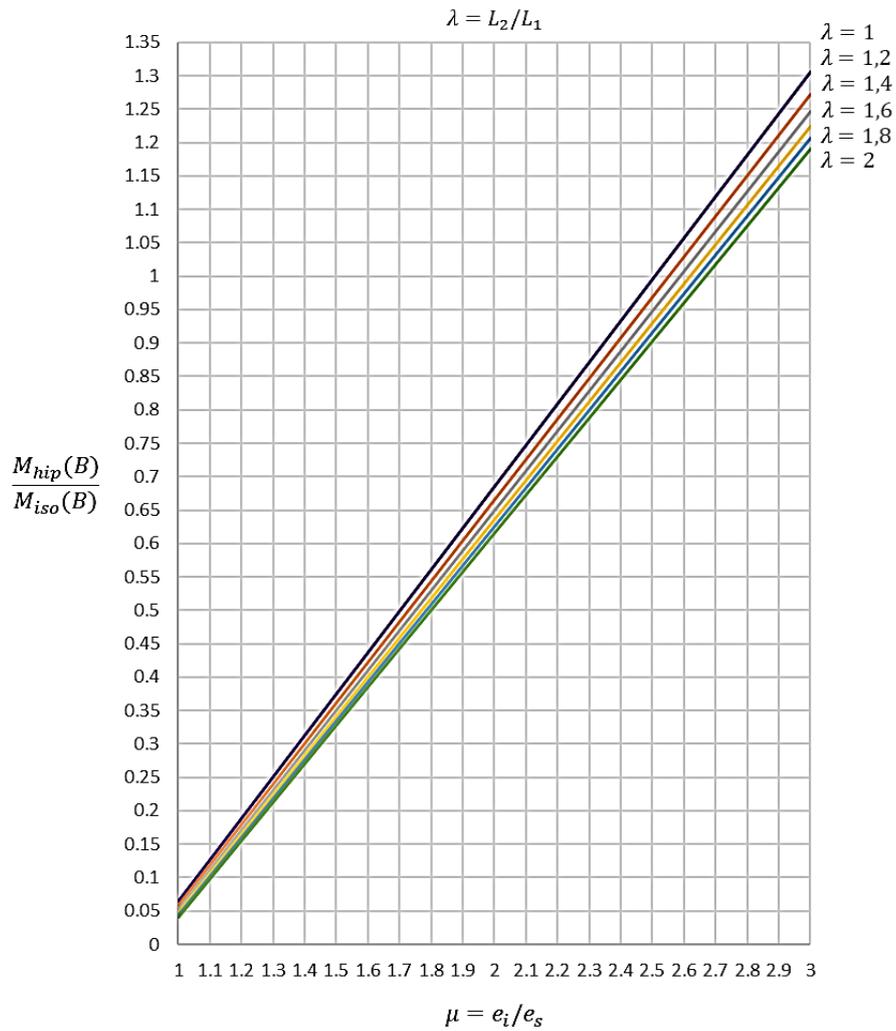


Figura 5-40 - Momento fletor hiperestático no apoio interno de uma viga de três vãos onde e_i ocorre ao meio dos vãos externos.

Para o caso particular em que $\lambda = 0$, a viga tem dois vãos e a expressão (5-202) recai em (5-144). Desta forma, conclui-se que a equação (5-202) é uma expressão geral para determinação do momento fletor hiperestático de uma viga protendida onde a excentricidade do cabo ocorre ao meio dos vãos externos. A Figura 5-41 combina os gráficos das Figuras 5-34 e 5-40.

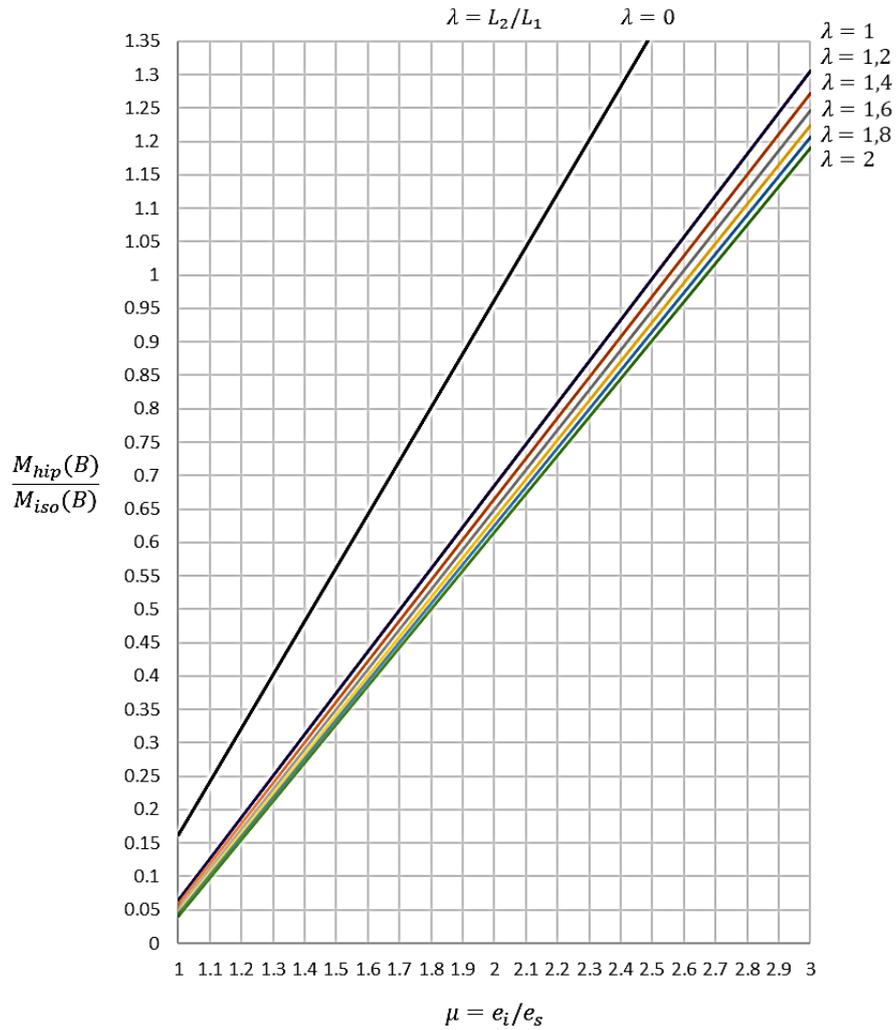


Figura 5-41 - Momento hiperestático no apoio interno de uma viga protendida onde e_i ocorre ao meio dos vãos externos.

5.5.2.2. Excentricidade máxima no terço do vão

Define-se o sistema estrutural, ilustrado na Figura 5-42, de uma viga simétrica protendida de três vãos onde a excentricidade máxima do cabo nos vãos externos máxima localiza-se no terço de cada vão. Os comprimentos dos vãos externos da viga são L_1 e do vão interno é L_2 , como ilustrado. Denotam-se por e_i e e_s as excentricidades máximas inferiores e superiores do cabo, respectivamente.

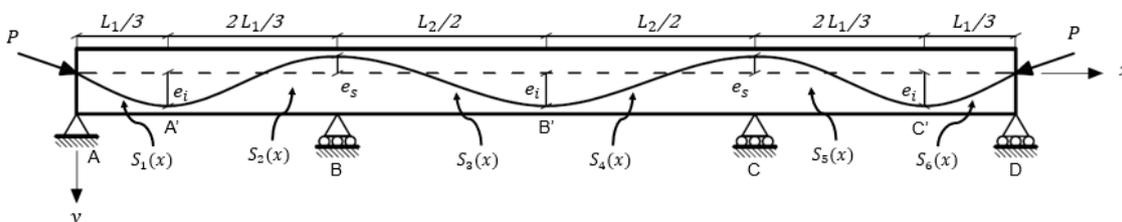


Figura 5-42 - Viga protendida de três vãos.

Este traçado é aproximado por seis segmentos de *spline*, denotadas $S_1(\bar{x})$, $S_2(\bar{x})$, $S_3(\bar{x})$, $S_4(\bar{x})$, $S_5(\bar{x})$ e $S_6(\bar{x})$, cada qual com os seus respectivos referenciais locais (Figura 5-43). Assumem-se, em seguida, polinômios de segundo grau (parábolas) para $S_1(\bar{x})$ e $S_6(\bar{x})$ e polinômios de terceiro grau para as demais funções.

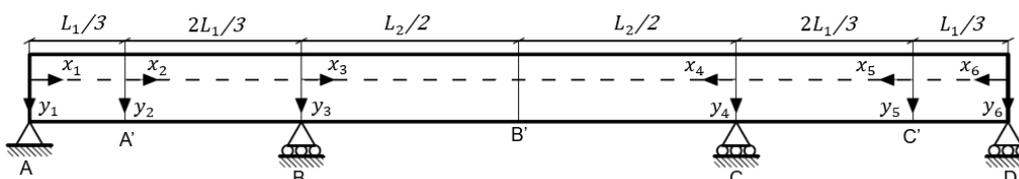


Figura 5-43– Referenciais locais para a viga.

A expressão que define a função $S_1(\bar{x})$, deduzida no item 5.5.1.2, em (5-148) é dada por:

$$S_1(\bar{x}) = \frac{3e_i}{L_1^2} (2L_1 - 3\bar{x})\bar{x} \quad (5-209)$$

onde $0 \leq \bar{x} \leq \frac{L_1}{2}$. A função $S_2(\bar{x})$ é definida por (5-153):

$$S_2(\bar{x}) = \frac{27(e_i + e_s)}{4L_1^3} \bar{x}^3 - \frac{27(e_i + e_s)}{4L_1^2} \bar{x}^2 + e_i \quad (5-210)$$

onde $0 \leq \bar{x} \leq \frac{2L_1}{3}$.eu

A terceira *spline* é expressa por (5-182):

$$S_3(\bar{x}) = -\frac{16(e_i + e_s)}{4L_2^3}\bar{x}^3 + \frac{12(e_i + e_s)}{4L_2^2}\bar{x}^2 - e_s \quad (5-211)$$

onde $0 \leq \bar{x} \leq \frac{L_2}{2}$.

As demais curvas são expressas por:

$$S_4(\bar{x}) = S_3(\bar{x}) \quad (5-212)$$

$$S_5(\bar{x}) = S_2(\bar{x}) \quad (5-213)$$

$$S_6(\bar{x}) = S_1(\bar{x}) \quad (5-214)$$

A partir de (5-12), (5-73) e (5-74), determinam-se, então, as expressões que caracterizam o momento fletor $m_B(\bar{x})$ no referencial local de cada trecho:

$$m_1(\bar{x}) = -\frac{\bar{x}}{L_1} \quad (5-215)$$

$$m_2(\bar{x}) = -\frac{(\bar{x} + L_1/3)}{L_1} \quad (5-216)$$

$$m_3(\bar{x}) = -1 + \frac{(2L_1 + 3L_2)}{2L_2(L_1 + L_2)}\bar{x} \quad (5-217)$$

$$m_4(\bar{x}) = \frac{L_2}{2(L_1 + L_2)} - \frac{(2L_1 + 3L_2)}{2L_2(L_1 + L_2)}\bar{x} \quad (5-218)$$

$$m_5(\bar{x}) = \frac{L_2}{2L_1(L_1 + L_2)}\left(\bar{x} + \frac{L_1}{3}\right) \quad (5-219)$$

$$m_6(\bar{x}) = \frac{L_2}{2L_1(L_1 + L_2)}\bar{x} \quad (5-220)$$

Para o cálculo do momento fletor hiperestático, solucionam-se as integrais, expressas na equação (5-110), para os trechos definidos na Figura 5-43:

$$\int_0^{L_1/2} S_1 \cdot m_1 dx = -\frac{5L_1 e_i}{108} \quad (5-221)$$

$$\int_0^{L_1/2} S_2 \cdot m_2 dx = -\frac{4L_1(2e_i - 3e_s)}{45} \quad (5-222)$$

$$\int_0^{L_2/2} S_3 \cdot m_3 dx = -\frac{L_2[2L_1(13e_i - 17e_s) + L_2(19e_i - 31e_s)]}{160(L_1 + L_2)} \quad (5-223)$$

$$\int_0^{L_2/2} S_4 \cdot m_4 dx = -\frac{L_2[2L_1(7e_i - 3e_s) + L_2(e_i + 4e_s)]}{160(L_1 + L_2)} \quad (5-224)$$

$$\int_0^{L_1/2} S_5 \cdot m_5 dx = \frac{2L_1 L_2(2e_i - 3e_s)}{45(L_1 + L_2)} \quad (5-225)$$

$$\int_0^{L_1/2} S_5 \cdot m_5 dx = \frac{5L_1 L_2 e_i}{216(L_1 + L_2)} \quad (5-226)$$

O somatório das parcelas resultantes das integrações realizadas em (5-221), (5-222), (5-223), (5-224), (5-225) e (5-226) é dado por:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \int_0^L S_i \cdot m_B d\bar{x} &= \quad (5-227) \\ &= \frac{L_2^2(14e_i + 9e_s)}{1080(L_1 + L_2)} - \frac{L_1(121e_i - 144e_s)}{540} \\ &\quad - \frac{L_2(149e_i - 126e_s)}{1080} \end{aligned}$$

Substituindo-se (5-78) e (5-227) em (5-110), obtém-se, após simplificações:

$$M_{hip}(B) = P \left[\frac{L_1(121e_i - 144e_s) + 135L_2(e_i - e_s)}{90(2L_1 + 3L_2)} \right] \quad (5-228)$$

Tem-se, portanto, em (5-228), uma expressão para a determinação prática do momento fletor hiperestático no apoio interno de uma viga de três vãos, considerando-se que a excentricidade máxima do cabo nos vãos externos ocorre a $L/3$ de cada apoio externos.

Para o caso particular em que $e_i = e_s = e$, típico de vigas retangulares, a equação (5-228), resulta em:

$$M_{hip}(B) = \frac{23PL_1e}{90(2L_1 + 3L_2)} \quad (5-229)$$

Definindo-se, então, os parâmetros adimensionais $\mu = e_i/e_s$ e $\lambda = L_2/L_1$, tem-se, a partir de (5-228), a relação:

$$\frac{M_{hip}(B)}{P \cdot e_s} = \frac{135\lambda(\mu - 1) + 121\mu - 144}{90(3\lambda + 2)} \quad (5-230)$$

O momento fletor isostático no apoio B é expresso por (5-36). Assim, a equação (5-230) fornece a razão entre os momentos fletores hiperestático e isostático nesta seção da viga:

$$\frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{135\lambda(\mu - 1) + 121\mu - 144}{90(3\lambda + 2)} \quad (5-231)$$

Atribuindo-se valores usuais para λ , obtêm-se, em seguida, as respectivas expressões para $M_{hip}(B)/M_{iso}(B)$:

$$\lambda = 1 \rightarrow \frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{256\mu - 279}{450} \quad (5-232)$$

$$\lambda = 1,2 \rightarrow \frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{283\mu - 306}{504} \quad (5-233)$$

$$\lambda = 1,4 \rightarrow \frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{310\mu - 333}{558} \quad (5-234)$$

$$\lambda = 1,6 \rightarrow \frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{337\mu - 360}{612} \quad (5-235)$$

$$\lambda = 1,8 \rightarrow \frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{364\mu - 387}{666} \quad (5-236)$$

$$\lambda = 2 \rightarrow \frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{391\mu - 414}{720} \quad (5-237)$$

Desta forma, pode-se estimar para fins de pré-dimensionamento, o momento fletor hiperestático nos apoios internos da estrutura a partir do ábaco da Figura 5-44.

Observa-se que o momento fletor hiperestático apresenta variações de pequena magnitude para diferentes valores de λ , sendo as retas do gráfico quase coincidentes.

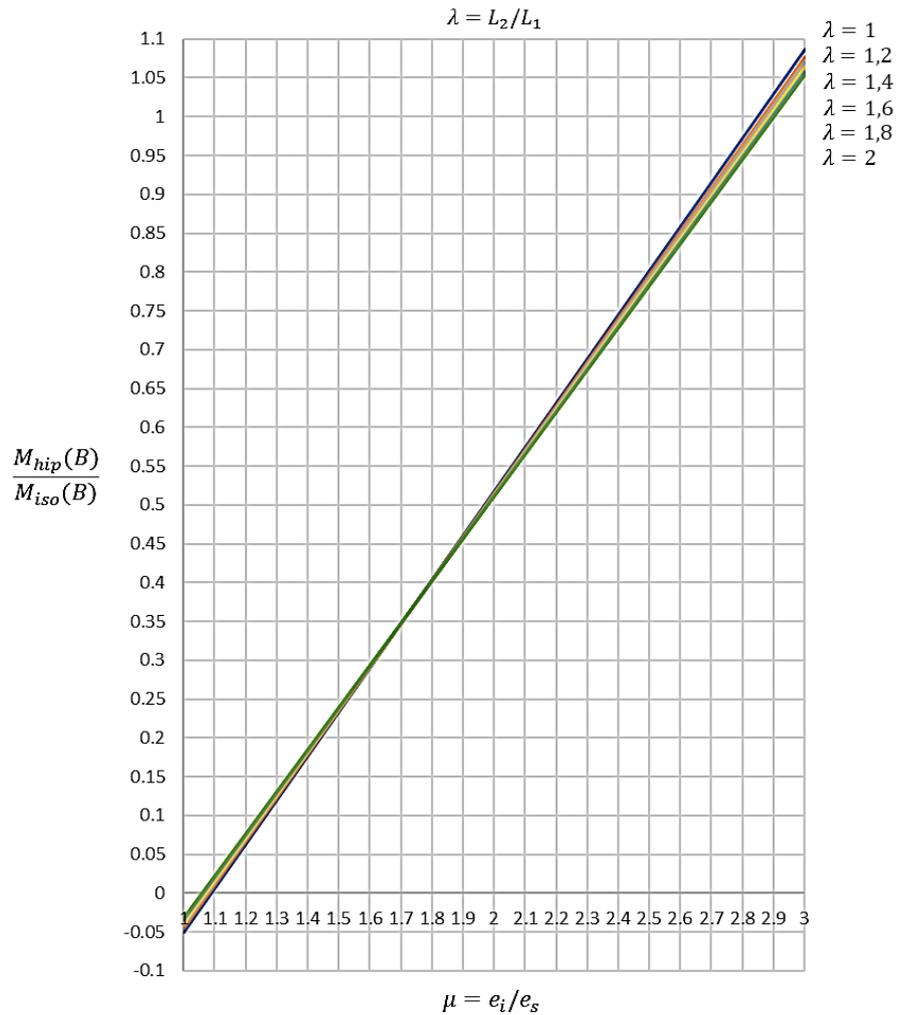


Figura 5-44 – Momento fletor hiperestático no apoio interno de uma viga de três vãos onde e_i ocorre no terço dos vãos externos.

Para o caso particular em que $\lambda = 0$, a viga é de dois vãos e a expressão (5-231) recai em (5-175). Conclui-se que a equação (5-231) é uma expressão geral para determinação do momento fletor hiperestático de uma viga protendida onde a excentricidade do cabo ocorre a $L_1/3$ dos apoios externos. A Figura 5-45 combina os gráficos das Figuras 5-37 e 5-44.

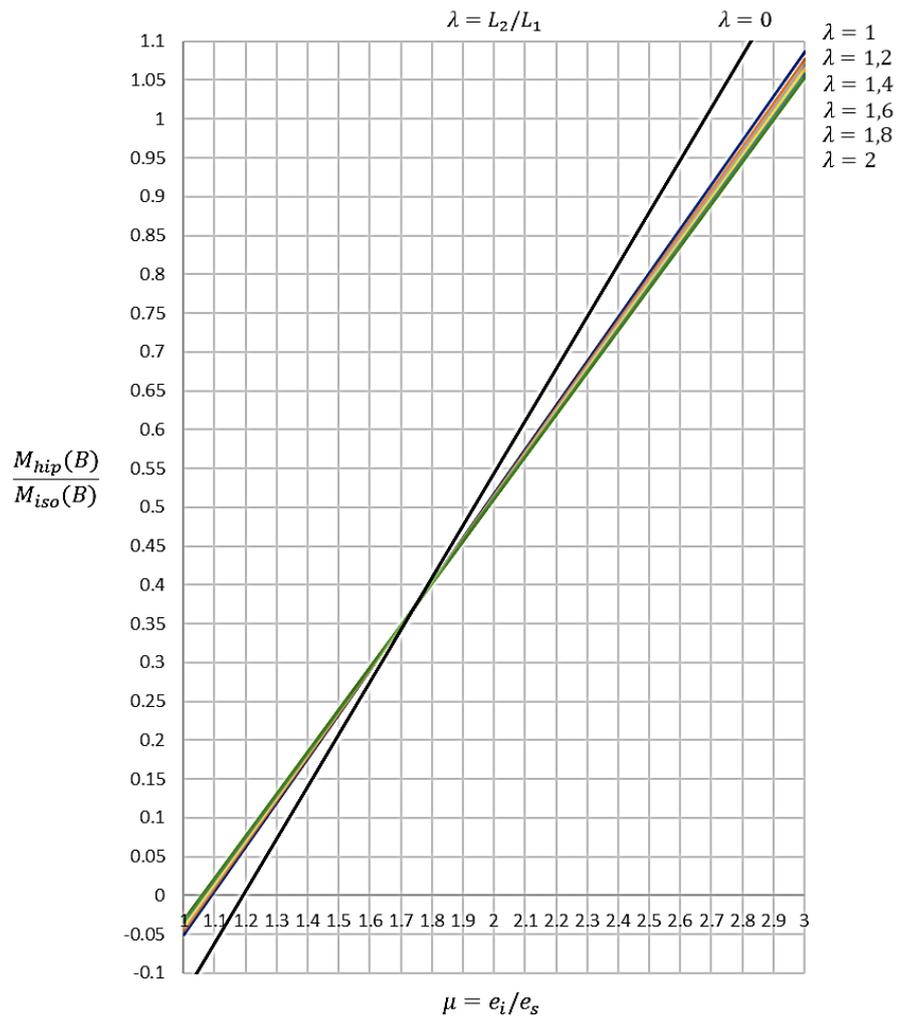


Figura 5-45 - Momento hiperestático no apoio interno de uma viga protendida onde e_i ocorre no terço dos vãos externos.

6. Exemplos numéricos

6.1. Dois vãos protendidos (seção simétrica)

A Figura 6-1 ilustra uma viga protendida simétrica de dois vãos para determinação dos momentos fletores de protensão. As excentricidades máximas inferior e superior do cabo são iguais, configuração típica de vigas de seção retangular. Consideram-se a força de protensão $P = 938kN$ e o produto EI constantes ao longo da viga. São desprezadas as perdas de protensão.

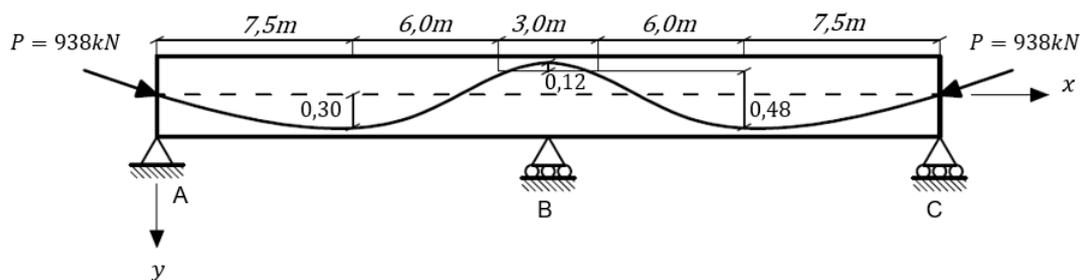


Figura 6-1 – Viga protendida de dois vãos.

Primeiramente, supõe-se uma aproximação parabólica para o traçado do cabo, e determina-se o momento fletor hiperestático de protensão por diferentes métodos de cálculo. Em seguida, adota-se uma aproximação com curvas *spline* definidas por polinômios de terceiro grau e comparam-se os resultados obtidos.

6.1.1. Ajuste parabólico para o traçado

6.1.1.1. Método da Carga Equivalente Convencional

Como descrito no Capítulo 3, é preciso, inicialmente, identificar os pontos de inflexão e de máximos e mínimos do traçado do cabo parabólico. Assim, definem-se os trechos para aplicação das cargas equivalentes ilustrados na Figura 6-2.

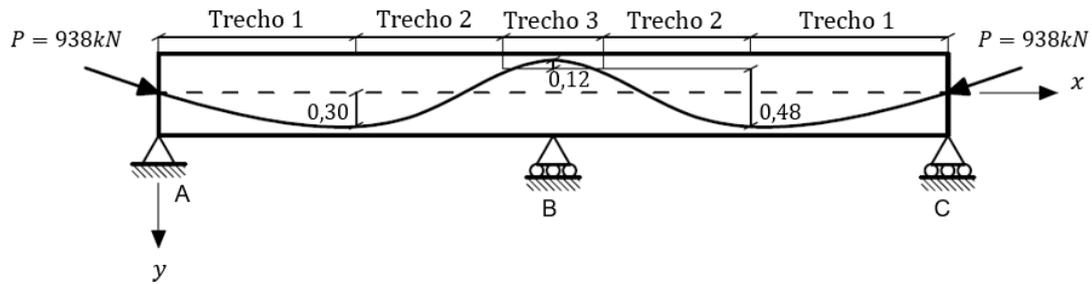


Figura 6-2 – Trechos das cargas equivalentes de LIN.

Identificam-se, em seguida, a flecha f e o comprimento L de cada arco de parábola. Tem-se, para o primeiro trecho:

$$\frac{L_1}{2} = 7,5m \rightarrow L_1 = 15,0m \quad (6-1)$$

$$f_1 = 0,30m \quad (6-2)$$

Para o segundo, obtém-se:

$$\frac{L_2}{2} = 6,0m \rightarrow L_2 = 12,0m \quad (6-3)$$

$$f_2 = (0,30 + 0,18)m \rightarrow f_2 = 0,48m \quad (6-4)$$

Finalmente, para o terceiro trecho:

$$L_3 = 3,0m \quad (6-5)$$

$$f_3 = 0,12m \quad (6-6)$$

Sendo a força de protensão $P = 938kN$, obtêm-se as cargas distribuídas equivalentes de protensão (PERLINGEIRO, 1998) por meio da expressão (3-13):

$$q_1 = \frac{8 \times 0,30 \times 938}{15^2} = 10kN/m \quad (6-7)$$

$$q_2 = \frac{8 \times 0,48 \times 938}{12^2} = 25kN/m \quad (6-8)$$

$$q_3 = \frac{8 \times 0,12 \times 938}{3^2} = 100kN/m \quad (6-9)$$

O ângulo α de ancoragem é obtido pela equação (3-10):

$$\alpha = \frac{4f_1}{L_1} \rightarrow \alpha = 0,08 \text{ rad} \quad (6-10)$$

As projeções da força de protensão na ancoragem são obtidas pelas expressões (3-11) e (3-12):

$$P_x = P = 938 \text{ kN} \quad (6-11)$$

$$P_y = P \cdot \alpha = 75 \text{ kN} \quad (6-12)$$

A estrutura do exemplo foi modelada no *software* de análise estrutural Ftool, aplicando-se as cargas equivalentes obtidas (Figura 6-3).

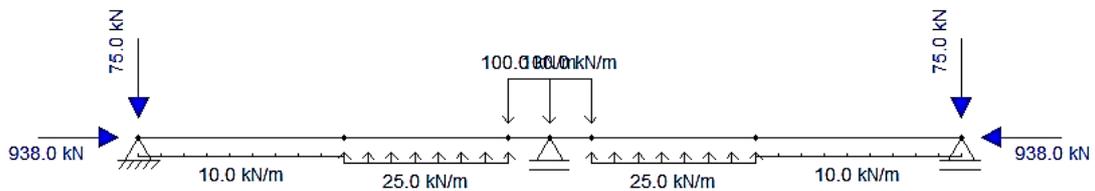


Figura 6-3 - Modelo estrutural - Ftool.

Observa-se que fica assegurado o equilíbrio de forças verticais:

$$\sum F_v = 2 \times 75 + 100 \times 3 - (10 \times 15 + 25 \times 12) = 0 \quad (6-13)$$

O diagrama de momentos fletores fornecido pelo programa está ilustrado a seguir:

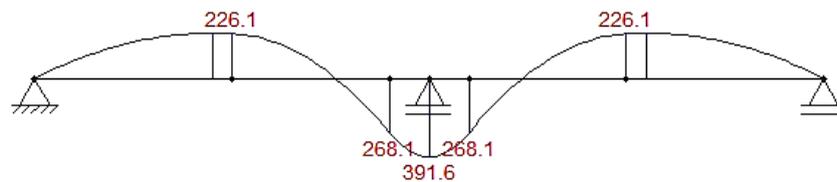


Figura 6-4 – Diagrama de momentos fletores totais de protensão ($kN \cdot m$).

Tem-se, assim, o momento fletor total no apoio B :

$$M_{tot}(B) = 391,6kN \cdot m \quad (6-14)$$

O momento fletor isostático em B é dado por:

$$M_{iso}(B) = 938 \times 0,30 = 281,4kN \cdot m \quad (6-15)$$

pode-se determinar, pela equação (2-7), o momento fletor hiperestático:

$$M_{hip}(B) = 391,6 - 281,4 = 110,2kN \cdot m \quad (6-16)$$

6.1.1.2. Análise pelo Método das Forças

Como descrito no Capítulo 3, a reação hiperestática no apoio central B da viga pode ser determinada pela equação (3-2):

$$R_B = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad (6-17)$$

onde δ_{10} é o deslocamento do ponto cujo apoio foi liberado, gerado pela ação do carregamento que atua na estrutura, definido como estado E_0 (Figura 6-5), δ_{11} é o coeficiente de flexibilidade associado ao hiperestático liberado R_B , isto é, o deslocamento deste ponto resultante da ação de uma carga unitária (estado E_1), conforme ilustra a Figura 6-6.

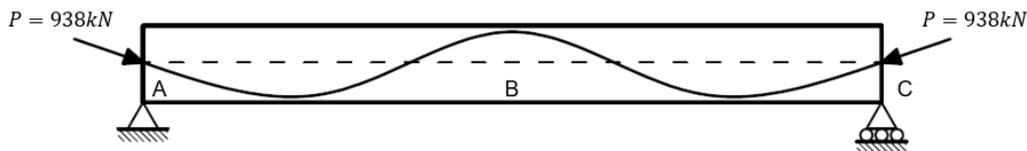


Figura 6-5 - Estado E_0 .

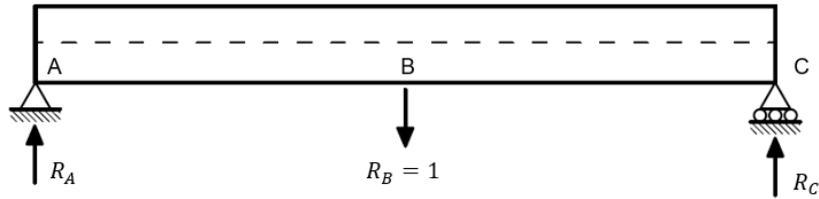


Figura 6-6 - Estado E_1 .

Determinam-se os valores de δ_{10} e δ_{11} pelo Método da Carga Unitária, descrito no Capítulo 5. Sendo $M_{iso}(x)$ o diagrama de momentos fletores correspondentes ao estado E_0 e M_U o diagrama de momentos fletores gerado pela aplicação da carga unitária, no estado E_1 , tem-se, pelo MCU:

$$\delta_{10} = \int_0^L \frac{M_U(x) \cdot M_{iso}(x)}{EI} dx \quad (6-18)$$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{M_U(x) \cdot M_U(x)}{EI} dx \quad (6-19)$$

Como as funções $M_U(x)$ e $M_{iso}(x)$ para este exemplo são simétricas, as integrações são realizadas apenas para o vão AB , sendo o resultado para o vão BC idêntico:

$$\delta_{10} = 2 \int_0^{15} \frac{M_U(x) \cdot M_{iso}(x)}{EI} dx \quad (6-20)$$

$$\delta_{11} = 2 \int_0^{15} \frac{M_U(x) \cdot M_U(x)}{EI} dx \quad (6-21)$$

Para determinar $M_{iso}(x)$, adota-se uma aproximação parabólica para o traçado do cabo nos trechos ilustrados na Figura 6-7.

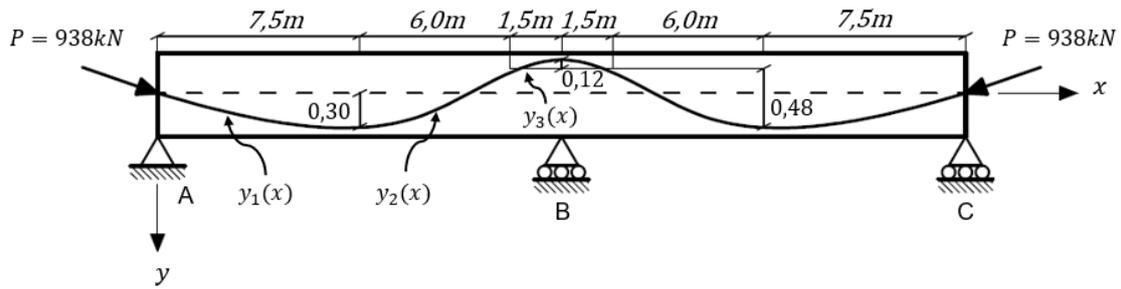


Figura 6-7 – Trechos do ajuste parabólico do cabo de protensão.

Tem-se, em (5-54), a equação da parábola com vértice na origem de um sistema de coordenadas (u, v) , em função de sua flecha f e de seu comprimento L :

$$v(u) = -\frac{4f}{L^2}u^2 \quad (6-22)$$

Definindo x_0 e y_0 como as coordenadas do vértice da parábola no sistema de coordenadas global da estrutura, valem as relações $v = y - y_0$ e $u = x - x_0$. Assim, a equação (6-22) resulta em:

$$y(x) = -\frac{4f}{L^2}(x - x_0)^2 + y_0 \quad (6-23)$$

Para o vão AB , a primeira parábola, denotada de $y_1(x)$ está definida em $0 \leq x \leq 7,5m$. Aplicam-se as condições $x_0 = 7,5m$, $y_0 = 0,3m$, $L = 15m$ e $f = -0,3m$ em (6-23), obtendo-se a expressão:

$$y_1(x) = 0,3 - \frac{2}{375}(x - 7,5)^2 \quad (6-24)$$

Analogamente, a segunda parábola está definida em $7,5m \leq x \leq 13,5m$. Aplicam-se as condições $x_0 = 7,5m$, $y_0 = 0,3m$, $L = 12m$ e $f = -0,48m$ em (6-23), obtendo-se a expressão:

$$y_2(x) = 0,3 - \frac{1}{75}(x - 7,5)^2 \quad (6-25)$$

Finalmente, para a terceira parábola, definida em $13,5m \leq x \leq 15m$, aplicam-se as condições $x_0 = 15m$, $y_0 = -0,3m$, $L = 3m$ e $f = 0,12m$ em (6-23), obtendo-se a expressão:

$$y_3(x) = -0,3 + \frac{4}{75}(x - 15)^2 \quad (6-26)$$

Por (2-6), o momento isostático é definido por:

$$M_{iso}(x) = -P \cdot y(x) \quad (6-27)$$

O momento fletor gerado no estado E_1 , pela carga unitária em B , denotado $M_U(x)$ é expresso por:

$$M_U(x) = \frac{x}{2} \quad (6-28)$$

onde $0 \leq x \leq 15m$.

Aplicam-se, então, (6-23), (6-24), (6-25), (6-26), (6-27) e (6-28) em (6-20), obtendo-se:

$$\delta_{10} = \frac{2}{EI} \times 4141,93 \quad (6-29)$$

Em seguida, aplicando-se (6-28) em (6-21), obtém-se:

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \times 281,25 \quad (6-30)$$

Finalmente, por (6-17), (6-29) e (6-30), determina-se a reação hiperestática no apoio central da viga:

$$R_B = 14,73kN \quad (6-31)$$

Têm-se, portanto, as reações nos apoios externos:

$$R_A = R_C = \frac{R_B}{2} = 7,37kN \quad (6-32)$$

O momento fletor hiperestático no apoio central B é, então, determinado por:

$$M_{hip}(B) = 7,37kN \times 15m = 110,5kN \cdot m \quad (6-33)$$

6.1.1.3. Análise por linha de influência

O momento hiperestático de protensão no apoio B da estrutura do exemplo é definido por meio da aplicação do conceito de linhas de influência de momentos de protensão, como descrito no Capítulo 5 deste trabalho.

A equação (4-27) define o momento hiperestático no apoio central da estrutura, expresso por:

$$M_{hip}(B) = \frac{1}{|\theta_B|} \sum_{i=1}^6 \left[\int_0^L M_{iso}(\bar{x}) \cdot \frac{m_B(\bar{x})}{E \cdot I} d\bar{x} \right] \quad (6-34)$$

onde $|\theta_B|$ é dado pela equação (5-15) e $m_B(\bar{x})$ é dado por (5-12) e (5-18). Como as funções $M_{iso}(\bar{x})$ e $m_B(\bar{x})$ para este exemplo são simétricas, a integração é realizada somente para o vão AB , sendo o resultado para o vão BC idêntico. Admitindo-se o produto EI constante ao longo da viga, a equação (6-34) se torna:

$$M_{hip}(B) = \frac{2}{|\theta_B|EI} \int_0^{15} M_{iso}(x) \cdot m_B(x) dx \quad (6-35)$$

Para determinar $M_{iso}(x)$ adota-se a mesma aproximação parabólica para o traçado do cabo definida no item 6.1.1.2. Valem, portanto, as equações (6-24), (6-25) e (6-26). Como momento de protensão isostático é definido por (6-27), obtém-se:

$$M_{hip}(B) = \frac{2P}{|\theta_B|EI} \int_0^{15} y(x) \cdot m_B(x) dx \quad (6-36)$$

A partir da equação (5-12), determina-se a expressão para o momento isostático $m_B(x)$ no vão AB :

$$m_B(x) = -\frac{x}{15} \quad (6-37)$$

onde $0 \leq x \leq 15m$.

Em seguida, com as expressões (6-24), (6-25) e (6-26) e (6-37), soluciona-se a integral de (6-36):

$$\int_0^{15} y(x) \cdot m_B(x) dx = 0,589 \quad (6-38)$$

Como $L_1 = L_2 = 15m$, calcula-se a parcela $|\theta_B|EI$ a partir da expressão (5-15):

$$|\theta_B|EI = \frac{L_1 + L_2}{3} = 10 \quad (6-39)$$

Substituindo-se os valores encontrados em (6-38) e (6-39) em (6-36), para $P = 938kN$, obtém-se o valor do momento fletor hiperestático no apoio B :

$$M_{hip}(B) = 2 \times \frac{938}{10} \times 0,589 = 110,5kN \cdot m \quad (6-40)$$

6.1.1.4. Análise por linha de influência (método simplificado)

O momento fletor no apoio central B pode ser determinado pela expressão (5-61), dada por:

$$M_{hip}(B) = P \left(\frac{L_1 \cdot f_1 + L_2 \cdot f_2}{L_1 + L_2} - e \right) \quad (6-41)$$

onde e é a excentricidade do cabo no apoio B da viga, definida pelas parábolas que descrevem o traçado do cabo em cada vão. Supõe-se que não há concordância no apoio central, como descrito no item 5.3. Para o sistema estrutural ilustrado na Figura 6-1, faz-se uma aproximação para a excentricidade e , a partir das tangentes de cada parábola no ponto de inflexão com a parábola central (Figura 6-8), estimando-se uma excentricidade fictícia.

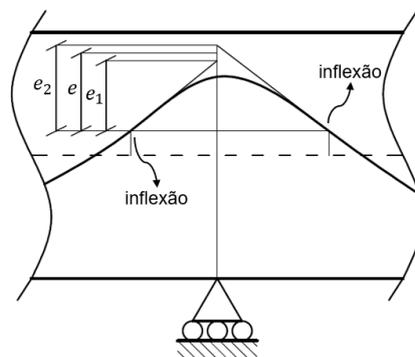


Figura 6-8 – Aproximação parabólica sem concordância entre parábolas.

Supõe-se um referencial local para a primeira parábola, com origem em seu vértice. Aplicando-se as condições de contorno $y(0) = 0$, $y(-7,5) = 0,30$ e $y(6) = 0,48$ na equação geral da parábola $y(x) = ax^2 + bx + c$, obtêm-se os coeficientes:

$$a = 8,89 \times 10^{-4} \quad (6-42)$$

$$b = 2,67 \times 10^{-3} \quad (6-43)$$

$$c = 0 \quad (6-44)$$

O coeficiente angular da reta tangente à parábola é dado pela sua derivada:

$$y'(x) = 2ax + b \quad (6-45)$$

Desta forma, no ponto de inflexão, o coeficiente angular da reta tangente vale:

$$y'(6) = 1,33 \times 10^{-2} \quad (6-46)$$

A excentricidade e_1 , obtida a partir da primeira parábola, é expressa por:

$$e_1 = y'(6) \times 1,50 + 0,18 \quad (6-47)$$

Aplicando-se (6-42) e (6-43) em (6-47), tem-se:

$$e_1 = 1,33 \times 10^{-2} \times 1,50 + 0,18 = 0,38m \quad (6-48)$$

Como o traçado do cabo de protensão é simétrico, as tangentes de ambas as parábolas também o são, isto implica:

$$e_1 = e_2 = e = 0,38m \quad (6-49)$$

Têm-se, portanto, as flechas:

$$f_1 = f_2 = 0,30 + \frac{e}{2} = 0,49m \quad (6-50)$$

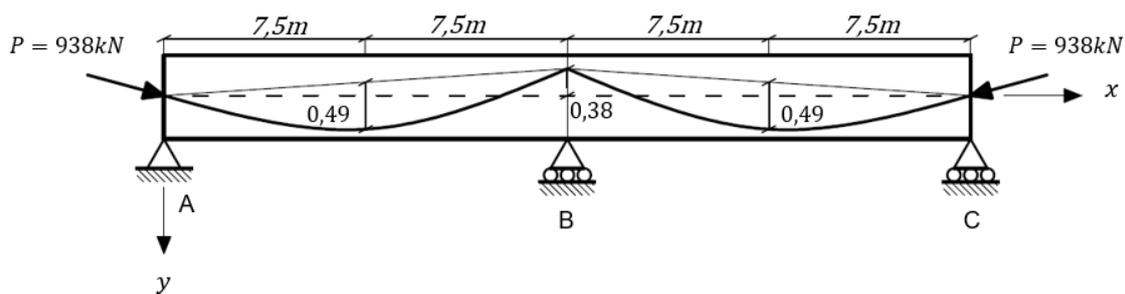


Figura 6-9 – Ajuste do traçado do cabo sem concordância no apoio central.

Assim, sendo $L_1 = L_2 = 15\text{m}$ e $P = 938\text{kN}$, por (6-41), determina-se o momento hiperestático no apoio central B .

$$M_{hip}(B) = 938 \left(\frac{15 \times 0,49 + 15 \times 0,49}{15 + 15} - 0,38 \right) = 103,2\text{kN} \cdot \text{m} \quad (6-51)$$

6.1.2. Ajuste em *spline* para o traçado

6.1.2.1. Análise pelo Método de ALVES

O ajuste para o cabo da viga deste exemplo é realizado a partir das expressões deduzidas no item 5.5.1 para curvas *spline*. Para isso, se considera-se que o cabo apresenta tangente nula no apoio B ; na seção A' , distante $7,5\text{m}$ do apoio A ; e na seção B' , distante $7,5\text{m}$ do apoio B . Nestes pontos, a excentricidade do cabo é máxima e vale $e = 0,30\text{m}$ (Figura 6-10).

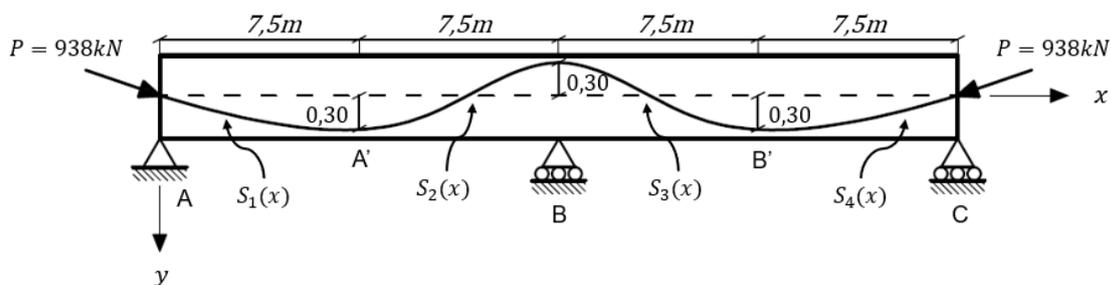


Figura 6-10 – Trechos para ajuste do traçado do cabo em *splines*.

As *splines* são definidas por quatro trechos de polinômios, como ilustrado na Figura 6-10. Sendo a tangente nos apoios A e C é definida pela equação (6-10), têm-se todos os dados de entrada para ajuste das curvas *splines*. Supondo-se polinômios de

terceiro grau para descrever o traçado do cabo, a *spline* ajustada em um trecho i é definida pela equação (5-93):

$$S_i(\bar{x}) = a_i\bar{x}^3 + b_i\bar{x}^2 + c_i\bar{x} + d_i \quad (6-52)$$

onde os coeficientes da *spline* a_i, b_i, c_i e d_i são determinados a partir das expressões (5-98), (5-99), (5-94) e (5-95), respectivamente.

A partir destas equações, programou-se a planilha ilustrada no Quadro 6-1, onde os dados de entrada são grifados em negrito.

Quadro 6-1 – Ajuste do traçado do cabo por *splines* cúbicas.

Seção	x (m)	y (m)	t
A	0,0	0,00	0,080
A'	7,5	0,30	0,000
B	15,0	-0,30	0,000
B'	22,5	0,30	0,000
C	30,0	0,00	-0,080

Trecho	xi (m)	xf (m)	Δx (m)	yi (m)	yf (m)	ti	tf	ai	bi	ci	di
AB	0,0	7,5	7,5	0,00	0,30	0,080	0,000	3,04E-06	-5,38E-03	0,08	0,00
	7,5	15,0	7,5	0,30	-0,30	0,000	0,000	2,84E-03	-3,20E-02	0,00	0,30
BC	15,0	22,5	7,5	-0,30	0,30	0,000	0,000	-2,84E-03	3,20E-02	0,00	-0,30
	22,5	30,0	7,5	0,30	0,00	0,000	-0,080	-3,04E-06	-5,31E-03	0,00	0,30

Substituindo-se os coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i obtidos no Quadro 6-1, determinam-se as excentricidades do cabo para cada trecho de aplicação da carga equivalente. Adotam-se trechos de comprimento de $L = 1,50m$, dividindo-se cada vão da estrutura em dez segmentos.

As tangentes dos ângulos de inclinação do cabo α são determinadas a partir da derivada da equação (6-52):

$$tg(\alpha_i) = S'_i(\bar{x}) = 3a_i\bar{x}^2 + 2b_i\bar{x} + c_i \quad (6-53)$$

As cargas equivalentes de protensão (Quadro 6-2), calculadas a partir das equações (3-15), (3-18) e (3-19) combinadas às equações (2-2), (2-3) e (2-4), para cada seção de cálculo, estão definidas no Quadro 6-2.

Quadro 6-2 – Cargas equivalentes de protensão.

Seção	x global (m)	P (kN)	α cab (grau)	e (m)	Trecho	L (m)	N1 (kN)	Q1 (kN)	M1 (kN.m)	N2 (kN)	Q2 (kN)	M2 (kN.m)	q1 (kN/m)	q2 (kN/m)	p (kN/m)
1 (A)	0,0	938	-4,58	0,000											
					1	1,50	935	-75	0	936	-60	-101	10,23	9,77	0,72
2	1,5	938	-3,67	-0,108											
					2	1,50	936	-60	-101	937	-45	-180	9,24	10,77	0,56
3	3,0	938	-2,75	-0,192											
					3	1,50	937	-45	-180	938	-30	-236	9,64	10,36	0,40
4	4,5	938	-1,83	-0,252											
					4	1,50	938	-30	-236	938	-15	-270	9,73	10,25	0,24
5	6,0	938	-0,91	-0,288											
					5	1,50	938	-15	-270	938	0	-281	9,89	10,06	0,08
6 (A')	7,5	938	0,00	-0,300											
					6	1,50	938	0	-281	935	72	-222	62,07	33,70	-1,84
7	9,0	938	4,39	-0,238											
					7	1,50	935	72	-222	932	107	-83	37,27	10,09	-2,27
8	10,5	938	6,57	-0,089											
					8	1,50	932	107	-83	932	107	83	11,96	-11,96	0,00
9	12,0	938	6,57	0,089											
					9	1,50	932	107	83	935	72	222	-10,09	-37,27	2,27
10	13,5	938	4,39	0,238											
					10	1,50	935	72	222	938	0	281	-33,70	-62,07	1,84
11 (B)	15,0	938	0,00	0,300											
					11	1,50	938	0	281	935	-72	222	-62,07	-33,70	-1,84
12	16,5	938	-4,39	0,238											
					12	1,50	935	-72	222	932	-107	83	-37,27	-10,09	-2,27
13	18,0	938	-6,57	0,089											
					13	1,50	932	-107	83	932	-107	-83	-11,96	11,96	0,00
14	19,5	938	-6,57	-0,089											
					14	1,50	932	-107	-83	935	-72	-222	10,09	37,27	2,27
15	21,0	938	-4,39	-0,238											
					15	1,50	935	-72	-222	938	0	-281	33,70	62,07	1,84
16 (B')	22,5	938	0,00	-0,300											
					16	1,50	938	0	-281	938	15	-270	10,06	9,89	-0,08
17	24,0	938	0,91	-0,288											
					17	1,50	938	15	-270	938	30	-236	10,25	9,73	-0,24
18	25,5	938	1,83	-0,252											
					18	1,50	938	30	-236	937	45	-180	10,36	9,64	-0,40
19	27,0	938	2,75	-0,192											
					19	1,50	937	45	-180	936	60	-101	10,77	9,24	-0,56
20	28,5	938	3,67	-0,108											
					20	1,50	936	60	-101	935	75	0	9,77	10,23	-0,72
21 (C)	30,0	938	4,58	0,000											

Aplicam-se, em seguida, as cargas equivalentes obtidas em seus respectivos trechos, obtendo-se o sistema estrutural da Figura 6-11.

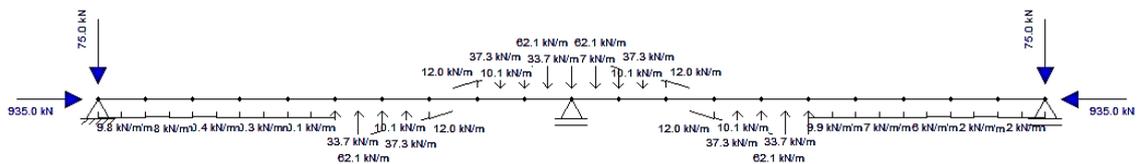


Figura 6-11 - Modelo estrutural - Ftool.

Os momentos fletores de protensão resultantes estão ilustrados na Figura 6-12.

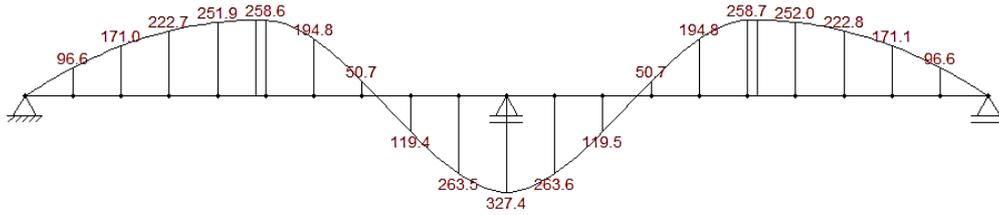


Figura 6-12– Diagrama de momentos fletores totais de protensão ($kN \cdot m$).

Tem-se, assim, o momento total no apoio B :

$$M_{tot}(B) = 327,4 kNm \quad (6-54)$$

Sendo o momento fletor isostático em B dado por (6-15), pode-se determinar, com a expressão (2-7), o momento fletor:

$$M_{hip}(B) = 327,4 - 281,4 = 46,0 kN \cdot m \quad (6-55)$$

6.1.2.2. Análise por linha de influência

Como descrito no Capítulo 5, o momento hiperestático no apoio B da viga pode ser definido pela equação (5-112):

$$M_{hip}(B) = -\frac{P}{60|\theta_B|EI} \sum_{i=1}^4 \Delta x_i \{ g_i [3(7y_i + 3y_j) + (3t_i - 2t_j)\Delta x_i] + g_j [3(3y_i + 7y_j) + (2t_i - 3t_j)\Delta x_i] \} \quad (6-56)$$

onde $|\theta_B|$ é dado pela equação (5-15) e os valores de $m(x)$ nas extremidades de cada trecho (g_i e g_j) são obtidos a partir das expressões (5-12) e (5-18), substituindo-se os respectivos valores de x_i e x_j . O somatório da equação (6-56) é realizado para os $n - 1 = 4$ trechos de *spline*, ilustrados na Figura 6-10.

Têm-se, assim, definidos todos os parâmetros para a solução do somatório da expressão (6-56). A partir destas equações, programou-se a planilha ilustrada no Quadro 6-3, onde os dados de entrada são grifados negrito.

Quadro 6-3 – Momento fletor hiperestático de protensão no apoio *B*.

Seção	x (m)	y (m)	t
A	0,0	0,00	0,080
A'	7,5	0,30	0,000
B	15,0	-0,30	0,000
B'	22,5	0,30	0,000
C	30,0	0,00	-0,080

L1 (m)	15
L2 (m)	15
P (kN)	938
$ \theta /EI$	10

Trecho	xi (m)	xf (m)	Δx (m)	yi (m)	yf (m)	ti	tf	gi	gj	Σ
AB	0,0	7,5	7,5	0,00	0,30	0,080	0,000	0,00	-0,50	-28,13
	7,5	15,0	7,5	0,30	-0,30	0,000	0,000	-0,50	-1,00	13,50
BC	15,0	22,5	7,5	-0,30	0,30	0,000	0,000	-1,00	-0,50	13,50
	22,5	30,0	7,5	0,30	0,00	0,000	-0,080	-0,50	0,00	-28,13
										-29,27

Mb (kN.m)	45,76
-----------	-------

O momento fletor hiperestático de protensão no apoio *B* é dado por:

$$M_{hip}(B) = 45,8 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (6-57)$$

Substituindo-se $\mu = e_i/e_s = 1$ na equação (5-144), obtém-se o valor relativo entre $M_{hip}(B)$ e $M_{iso}(B)$:

$$\frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{64\mu - 51}{80} = 0,1625 \quad (6-58)$$

O gráfico da Figura 5-34, ilustrado no item 5.5.1.1, fornece este mesmo resultado, como se verifica a seguir.

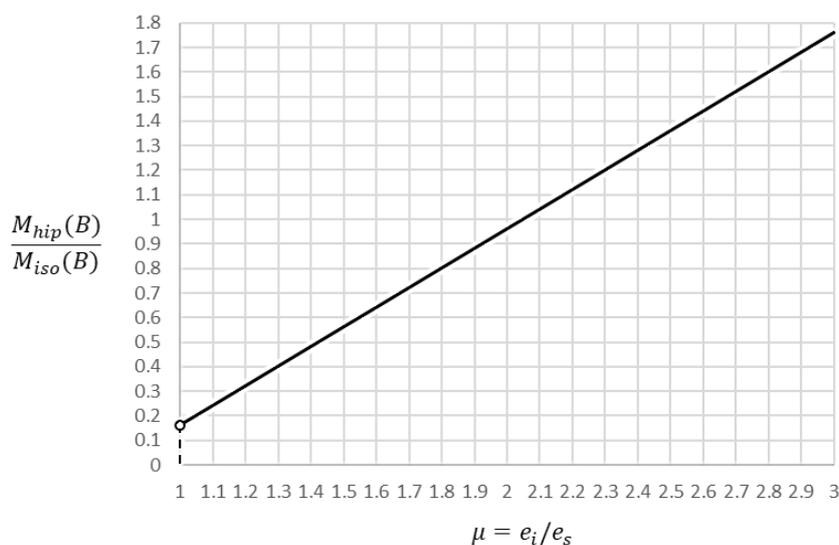


Figura 6-13 – Momento fletor hiperestático no apoio *B*

Sendo, então, $M_{iso}(B) = 281,4kN \cdot m$, como definido em (6-15), tem-se:

$$M_{hip}(B) = 281,4 \times 0,1625 = 45,7kNm \quad (6-59)$$

6.1.3. Comparação de resultados

O Quadro 6-4, compara os resultados obtidos para o momento fletor hiperestático no apoio B da estrutura do exemplo, para o ajuste parabólico e em *splines* cúbicas. Observa-se que os resultados se mostram praticamente coincidentes para os diversos procedimentos utilizados em cada ajuste de traçado, validando-se, assim, as expressões e ábacos desenvolvidos neste trabalho.

Verifica-se, ainda a alta sensibilidade do momento fletor hiperestático a variações no traçado do cabo, uma vez que os resultados obtidos para cada ajuste apresentam diferença significativa. Na Figura 6-14, sobrepõem-se os ajustes por trechos de parábolas e *splines* cúbicas, com mesma escala vertical e horizontal.

Quadro 6-4 – Comparação de resultados obtidos para o momento hiperestático no apoio B .

Ajuste do traçado	Método de Cálculo	Mb (kN.m)
Parabólico	Carga Equivalente Convencional	110,2
	Método das Forças	110,5
	Linha de Influência	110,5
	Linha de Influência (método simplificado)	103,2
Spline Cúbica	Método de ALVES	46,0
	Linha de Influência	45,8
	Ábaco	45,7

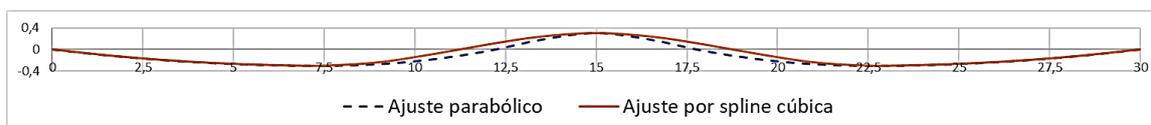


Figura 6-14 – Sobreposição dos ajustes para o traçado (mesma escala horizontal e vertical).

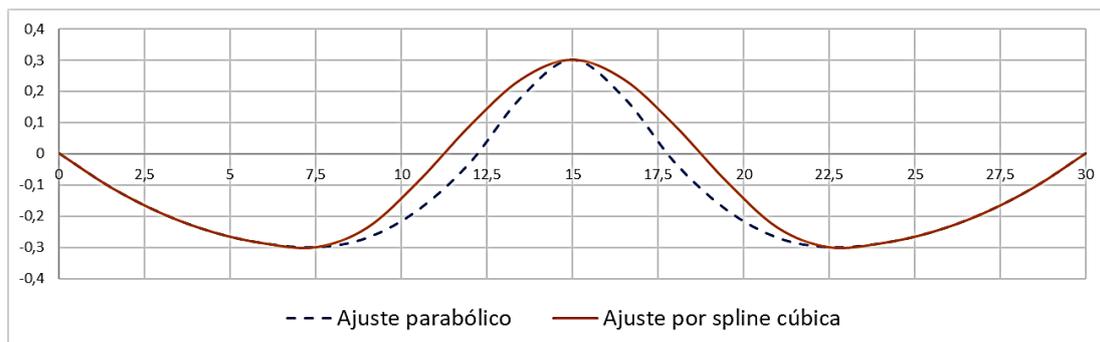


Figura 6-15 – Sobreposição dos ajustes para o traçado (escala vertical majorada).

6.2. Três vãos protendidos (seção simétrica)

A Figura 6-16 ilustra uma viga protendida simétrica de três vãos para a qual se buscam determinar os momentos de protensão. As excentricidades máximas inferior e superior do cabo são iguais, configuração típica de vigas de seção retangular. Consideram-se a força de protensão $P = 938\text{kN}$ e o produto EI constantes ao longo da viga. São desprezadas perdas de protensão.

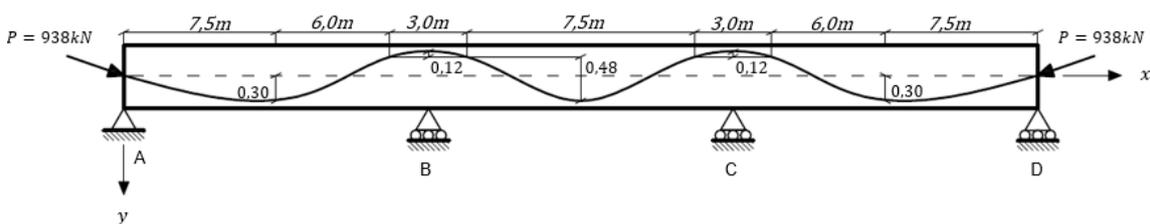


Figura 6-16 – Exemplo numérico de viga com três vãos protendida.

Como se realizou no item 6.1, primeiramente, supõe-se uma aproximação parabólica para o traçado do cabo, e determina-se o momento hiperestático de protensão por diferentes procedimentos de cálculo. Em seguida, adota-se uma aproximação com curvas *spline* definidas por polinômios de terceiro grau, e comparam-se os resultados obtidos.

6.2.1. Ajuste parabólico para o traçado

6.2.1.1. Método da Carga Equivalente Convencional

Primeiramente, identificam-se os pontos de inflexão e de máximos e mínimos do traçado do cabo parabólico. Assim, definem-se os trechos para aplicação das cargas equivalentes a serem determinadas (Figura 6-17).

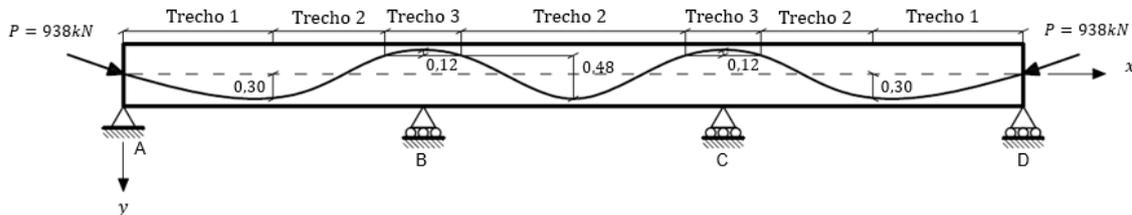


Figura 6-17 – Trechos para aplicação das cargas equivalentes.

Observa-se a força de protensão P , os comprimentos dos vãos e as flechas dos trechos 1, 2 e 3 são os mesmos vistos no exemplo 6.1.1. Portanto, tem-se novamente:

$$q_1 = 10 \text{ kN/m} \quad (6-60)$$

$$q_2 = 25 \text{ kN/m} \quad (6-61)$$

$$q_3 = 100 \text{ kN/m} \quad (6-62)$$

O ângulo α de ancoragem é o mesmo obtido em 6.1.1., assim como as projeções de P :

$$P_x = P = 938 \text{ kN} \quad (6-63)$$

$$P_y = P \cdot \alpha = 75 \text{ kN} \quad (6-64)$$

Aplicando-se as cargas equivalentes obtidas em seus respectivos trechos, tem-se o seguinte sistema estrutural modelado no *software* Ftool:

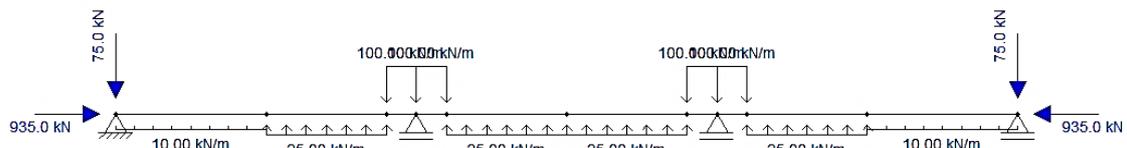


Figura 6-18 - Modelo estrutural - Ftool.

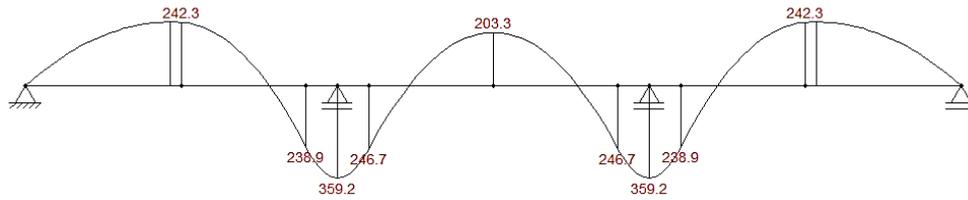


Figura 6-19 – Diagrama de momentos fletores totais ($kN \cdot m$).

Tem-se, assim, o momento total no apoio B :

$$M(B) = 359,2 \quad (6-65)$$

Sendo o momento fletor isostático em B dado por (6-15), pode-se determinar, por (2-7), o momento hiperestático obtido pelo programa:

$$M_{hip}(B) = 359,2 - 281,4 = 77,8 kN \cdot m \quad (6-66)$$

6.2.1.2. Análise por linha de influência (método simplificado)

Por (5-91), o momento fletor no apoio central B pode ser aproximado por:

$$M_{hip}(B) = P \left(\frac{L_1 \cdot f_1 + L_2 \cdot f_1}{L_1 + \frac{3}{2} L_2} - e \right) \quad (6-67)$$

onde e é a excentricidade do cabo no apoio B da viga, obtida pela suposição de que as parábolas que descrevem o traçado do cabo não possuem concordância nos apoios internos da estrutura. Uma vez que este não é o caso do sistema estrutural ilustrado na Figura 6-16, novamente será obtida uma aproximação para uma excentricidade fictícia e a partir das tangentes das parábolas de cada vão no apoio B .

Observa-se que traçado do cabo no vão AB é o mesmo estudado no exemplo anterior, no item 6.1.1.4, assim, o valor de e_1 é determinado pela equação (6-48):

$$e_1 = 0,38m \quad (6-68)$$

Supõe-se um referencial local para a segunda parábola (vão central), com origem em seu vértice. Aplicando-se as condições de contorno $y(-6) = 0,48$, $y(0) = 0$

e $y(6) = 0,48$ na equação geral da parábola $y(x) = ax^2 + bx + c$. Obtêm-se os coeficientes:

$$a = 1,33 \times 10^{-2} \quad (6-69)$$

$$b = -1,67 \times 10^{-13} \cong 0 \quad (6-70)$$

$$c = 0 \quad (6-71)$$

O coeficiente angular da reta tangente à parábola é dado pela sua derivada:

$$y'(x) = 2ax \quad (6-72)$$

Desta forma, no ponto de inflexão, o coeficiente angular da reta tangente vale:

$$y'(-6) = -1,60 \times 10^{-1} \quad (6-73)$$

A excentricidade e é expressa por:

$$e_2 = y'(6) \times 1,50 + 0,18 \quad (6-74)$$

Aplicando-se (6-42) e (6-43) em (6-47), tem-se:

$$e_2 = 1,60 \times 10^{-1} \times 1,50 + 0,18 = 0,42m \quad (6-75)$$

Isto implica (Figura 6-8):

$$e = \frac{e_1 + e_2}{2} = 0,40m \quad (6-76)$$

Têm-se, assim, as flechas:

$$f_1 = 0,30 + \frac{e}{2} = 0,50m \quad (6-77)$$

$$f_2 = 0,30 + e = 0,70m \quad (6-78)$$

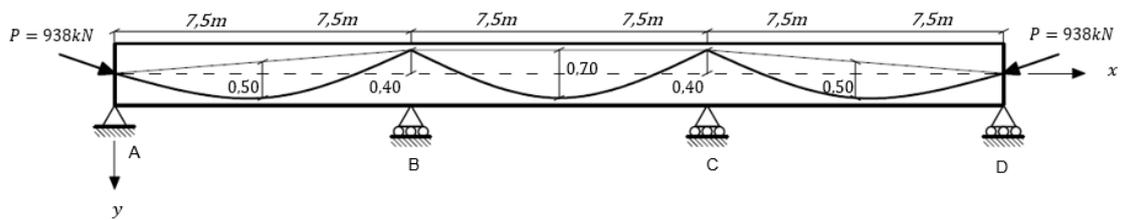


Figura 6-20 - Aproximação do traçado do cabo sem concordância nos apoios centrais.

Assim, sendo $L_1 = L_2 = 15m$ e $P = 938kN$, por (5-61), determina-se o momento hiperestático no apoio central B .

$$M_{hip}(B) = 75,0kNm \quad (6-79)$$

6.2.2. Ajuste em *spline* para o traçado

6.2.2.1. Análise pelo Método de ALVES

O ajuste para o cabo da viga deste exemplo será realizado a partir das expressões deduzidas no Capítulo 5.5.1 para curvas *spline*. Para isso, se assume-se que o cabo apresenta tangente nula nos apoios da estrutura, e nas seções A' , B' e C' . Nestes pontos, a excentricidade do cabo é máxima e vale $e = 0,30m$ (Figura 6-10).

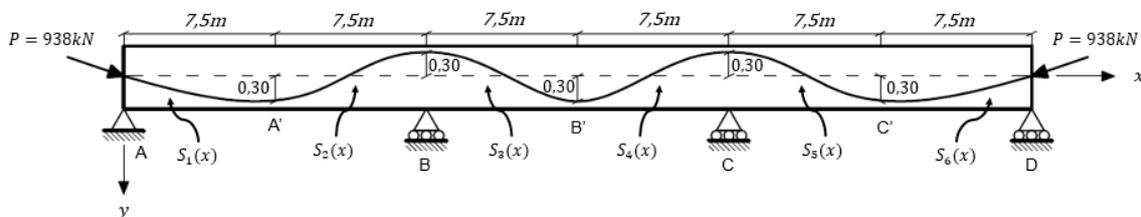


Figura 6-21 – Trechos para ajuste do traçado do cabo em *splines*.

A *spline* será, então, definida por quatro trechos de polinômios, como ilustrado na Figura 6-21. Sendo a tangente nos apoios A e D é definida pela equação (6-10), têm-se todos os dados de entrada para ajuste das curvas *splines*. Como no item 6.1.2.1, supõem-se polinômios de terceiro grau para descrever o traçado do cabo, a *spline* ajustada em um trecho i é, então, definida pela equação (5-93). Onde os coeficientes da *spline* a_i, b_i, c_i e d_i são determinados a partir de (5-98), (5-99), (5-94) e (5-95), respectivamente.

A partir destas equações, programou-se, então, a planilha do Quadro 6-5, onde os dados de entrada são grifados em negrito.

Quadro 6-5 – Ajuste do traçado do cabo por *splines* cúbicas.

Seção	x (m)	y (m)	rad	t
A	0,0	0,00	0,080	0,080
A'	7,5	0,30	0,000	0,000
B	15,0	-0,30	0,000	0,000
B'	22,5	0,30	0,000	0,000
C	30,0	-0,30	0,000	0,000
C'	37,5	0,30	0,000	0,000
D	45,0	0,00	-0,080	-0,080

Trecho	xi (m)	xf (m)	Δx (m)	yi (m)	yf (m)	ti	tf	ai	bi	ci	di
AB	0,0	7,5	7,5	0,00	0,30	0,080	0,000	3,04E-06	-5,38E-03	0,08	0,00
	7,5	15,0	7,5	0,30	-0,30	0,000	0,000	2,84E-03	-3,20E-02	0,00	0,30
BC	15,0	22,5	7,5	-0,30	0,30	0,000	0,000	-2,84E-03	3,20E-02	0,00	-0,30
	22,5	30,0	7,5	0,30	-0,30	0,000	0,000	2,84E-03	-3,20E-02	0,00	0,30
CD	30,0	37,5	7,5	-0,30	0,30	0,000	0,000	-2,84E-03	3,20E-02	0,00	-0,30
	37,5	45,0	7,5	0,30	0,00	0,000	-0,080	-3,04E-06	-5,31E-03	0,00	0,30

Aplicando-se, então, em (5-93), os coeficientes a_i , b_i , c_i e d_i relacionados no Quadro 6-5, determinam-se as excentricidades do cabo para cada trecho de aplicação da carga equivalente. Adotam-se trechos de comprimento de $L = 1,50m$, dividindo-se cada vão da estrutura em dez segmentos. As tangentes dos ângulos de inclinação do cabo α são determinadas a partir da equação (6-53).

Determinam-se, então, as cargas equivalentes de protensão (Quadro 6-6) a partir das Equações (3-15), (3-18) e (3-19) combinadas a (2-2), (2-3) e (2-4), para cada seção de cálculo.

Quadro 6-6 – Cargas equivalentes de protensão.

Seção	x global (m)	P (kN)	α cab (grau)	e (m)	Trecho	L (m)	N1 (kN)	Q1 (kN)	M1 (kN.m)	N2 (kN)	Q2 (kN)	M2 (kN.m)	q1 (kN/m)	q2 (kN/m)	p (kN/m)	
1 (A)	0,0	938	-4,58	0,000												
					1	1,50	935	-75	0	936	-60	-101	10,23	9,77	0,72	
2	1,5	938	-3,67	-0,108												
					2	1,50	936	-60	-101	937	-45	-180	9,24	10,77	0,56	
3	3,0	938	-2,75	-0,192												
					3	1,50	937	-45	-180	938	-30	-236	9,64	10,36	0,40	
4	4,5	938	-1,83	-0,252												
					4	1,50	938	-30	-236	938	-15	-270	9,73	10,25	0,24	
5	6,0	938	-0,91	-0,288												
					5	1,50	938	-15	-270	938	0	-281	9,89	10,06	0,08	
6 (A')	7,5	938	0,00	-0,300												
					6	1,50	938	0	-281	935	72	-222	62,07	33,70	-1,84	
7	9,0	938	4,39	-0,238												
					7	1,50	935	72	-222	932	107	-83	37,27	10,09	-2,27	
8	10,5	938	6,57	-0,089												
					8	1,50	932	107	-83	932	107	83	11,96	-11,96	0,00	
9	12,0	938	6,57	0,089												
					9	1,50	932	107	83	935	72	222	-10,09	-37,27	2,27	
10	13,5	938	4,39	0,238												
					10	1,50	935	72	222	938	0	281	-33,70	-62,07	1,84	
11 (B)	15,0	938	0,00	0,300												
					11	1,50	938	0	281	935	-72	222	-62,07	-33,70	-1,84	
12	16,5	938	-4,39	0,238												
					12	1,50	935	-72	222	932	-107	83	-37,27	-10,09	-2,27	
13	18,0	938	-6,57	0,089												
					13	1,50	932	-107	83	932	-107	-83	-11,96	11,96	0,00	
14	19,5	938	-6,57	-0,089												
					14	1,50	932	-107	-83	935	-72	-222	10,09	37,27	2,27	
15	21,0	938	-4,39	-0,238												
					15	1,50	935	-72	-222	938	0	-281	33,70	62,07	1,84	
16 (B')	22,5	938	0,00	-0,300												
					16	1,50	938	0	-281	935	72	-222	62,07	33,70	-1,84	
17	24,0	938	4,39	-0,238												
					17	1,50	935	72	-222	932	107	-83	37,27	10,09	-2,27	
18	25,5	938	6,57	-0,089												
					18	1,50	932	107	-83	932	107	83	11,96	-11,96	0,00	
19	27,0	938	6,57	0,089												
					19	1,50	932	107	83	935	72	222	-10,09	-37,27	2,27	
20	28,5	938	4,39	0,238												
					20	1,50	935	72	222	938	0	281	-33,70	-62,07	1,84	
21 (C)	30,0	938	0,00	0,300												
					21	1,50	938	0	281	935	-72	222	-62,07	-33,70	-1,84	
22	31,5	938	-4,39	0,238												
					22	1,50	935	-72	222	932	-107	83	-37,27	-10,09	-2,27	
23	33,0	938	-6,57	0,089												
					23	1,50	932	-107	83	932	-107	-83	-11,96	11,96	0,00	
24	34,5	938	-6,57	-0,089												
					24	1,50	932	-107	-83	935	-72	-222	10,09	37,27	2,27	
25	36,0	938	-4,39	-0,238												
					25	1,50	935	-72	-222	938	0	-281	33,70	62,07	1,84	
26 (C')	37,5	938	0,00	-0,300												
					26	1,50	938	0	-281	938	15	-270	10,06	9,89	-0,08	
27	39,0	938	0,91	-0,288												
					27	1,50	938	15	-270	938	30	-236	10,25	9,73	-0,24	
28	40,5	938	1,83	-0,252												
					28	1,50	938	30	-236	937	45	-180	10,36	9,64	-0,40	
29	42,0	938	2,75	-0,192												
					29	1,50	937	45	-180	936	60	-101	10,77	9,24	-0,56	
30	43,5	938	3,67	-0,108												
					30	1,50	936	60	-101	935	75	0	9,77	10,23	-0,72	
31 (D)	45,0	938	4,58	0,000												

Aplicam-se, em seguida, as cargas equivalentes obtidas em seus respectivos trechos, obtendo-se o sistema estrutural da Figura 6-22, modelado pelo *Software* de análise estrutural Ftool.

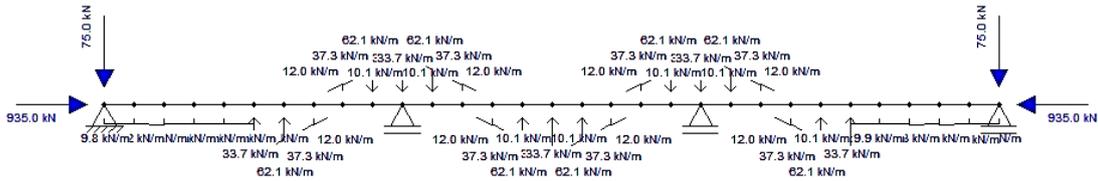


Figura 6-22 - Modelo estrutural - Ftool.

Os resultados obtidos pelo programa para os momentos fletores de protensão são ilustrados na Figura 6-23.

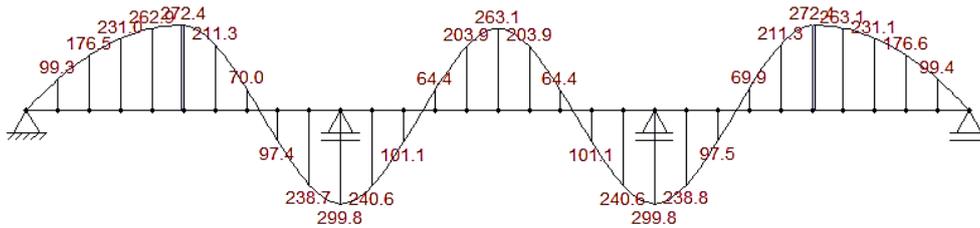


Figura 6-23 – Diagrama de momentos fletores totais ($kN \cdot m$).

Tem-se, assim, o momento fletor total no apoio B :

$$M_{tot}(B) = 299,8kN \cdot m \tag{6-80}$$

Sendo o momento fletor isostático em B dado por (6-15), pode-se determinar, por (2-7), o momento hiperestático obtido pelo programa:

$$M_{hip}(B) = 299,8 - 281,4 = 18,4kN \cdot m \tag{6-81}$$

6.2.2.2. Análise por linha de influência

Como descrito no Capítulo 5, o momento hiperestático no apoio B da viga deste exemplo pode ser definido pela equação (5-112):

$$M_{hip}(B) = -\frac{P}{60|\theta_B|EI} \sum_{i=1}^6 \Delta x_i \{g_i[3(7y_i + 3y_j) + (3t_i - 2t_j)\Delta x_i] + g_j[3(3y_i + 7y_j) + (2t_i - 3t_j)\Delta x_i]\} \tag{6-82}$$

Onde $|\theta_B|$ é dado pela equação (5-78) e os valores de $m(x)$ nas extremidades de cada trecho (g_i e g_j) são obtidos a partir de (5-12), (5-73) e (5-74), substituindo-se os respectivos valores de x_i e x_j . O somatório da equação (6-82) é realizado para os $n - 1 = 6$ trechos de *spline*, ilustrados na Figura 6-21.

Têm-se, assim, definidos todos os parâmetros para a solução do somatório da expressão (6-82). A partir destas equações, programou-se o Quadro 6-7, onde os dados de entrada estão grifados em negrito.

Quadro 6-7 – Momento fletor hiperestático de protensão no apoio B.

Seção	x (m)	y (m)	rad	t
A	0,0	0,00	0,080	0,080
A'	7,5	0,30	0,000	0,000
B	15,0	-0,30	0,000	0,000
B'	22,5	0,30	0,000	0,000
C	30,0	-0,30	0,000	0,000
C'	37,5	0,30	0,000	0,000
D	45,0	0,00	-0,080	-0,080

L1 (m)	15
L2 (m)	15
P (kN)	938
$ \theta EI$	9,38
Mc	0,25

Trecho	xi (m)	xf (m)	Δx (m)	yi (m)	yf (m)	ti	tf	gi	gj	Σ
AB	0,0	7,5	7,5	0,00	0,30	0,080	0,000	0,00	-0,50	-28,13
	7,5	15,0	7,5	0,30	-0,30	0,000	0,000	-0,50	-1,00	13,50
BC	15,0	22,5	7,5	-0,30	0,30	0,000	0,000	-1,00	-0,38	16,88
	22,5	30,0	7,5	0,30	-0,30	0,000	0,000	-0,38	0,25	-16,88
CD	30,0	37,5	7,5	-0,30	0,30	0,000	0,000	0,25	0,13	-3,38
	37,5	45,0	7,5	0,30	0,00	0,000	-0,080	0,13	0,00	7,03
										-10,98

Mb (kN.m)	18,30
-----------	-------

Tem-se, portanto o momento hiperestático de protensão no apoio B:

$$M_{hip}(B) = 18,3kN \cdot m \quad (6-83)$$

Observa-se que este resultado é coerente o que se obtém a partir da equação (5-202), aplicando-se $\mu = \lambda = 1$:

$$\frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{60\lambda(\mu - 1) + 64\mu - 51}{40(3\lambda + 2)} = 0,065 \quad (6-84)$$

O ábaco da Figura 5-40 fornece este mesmo resultado, como se verifica a seguir.

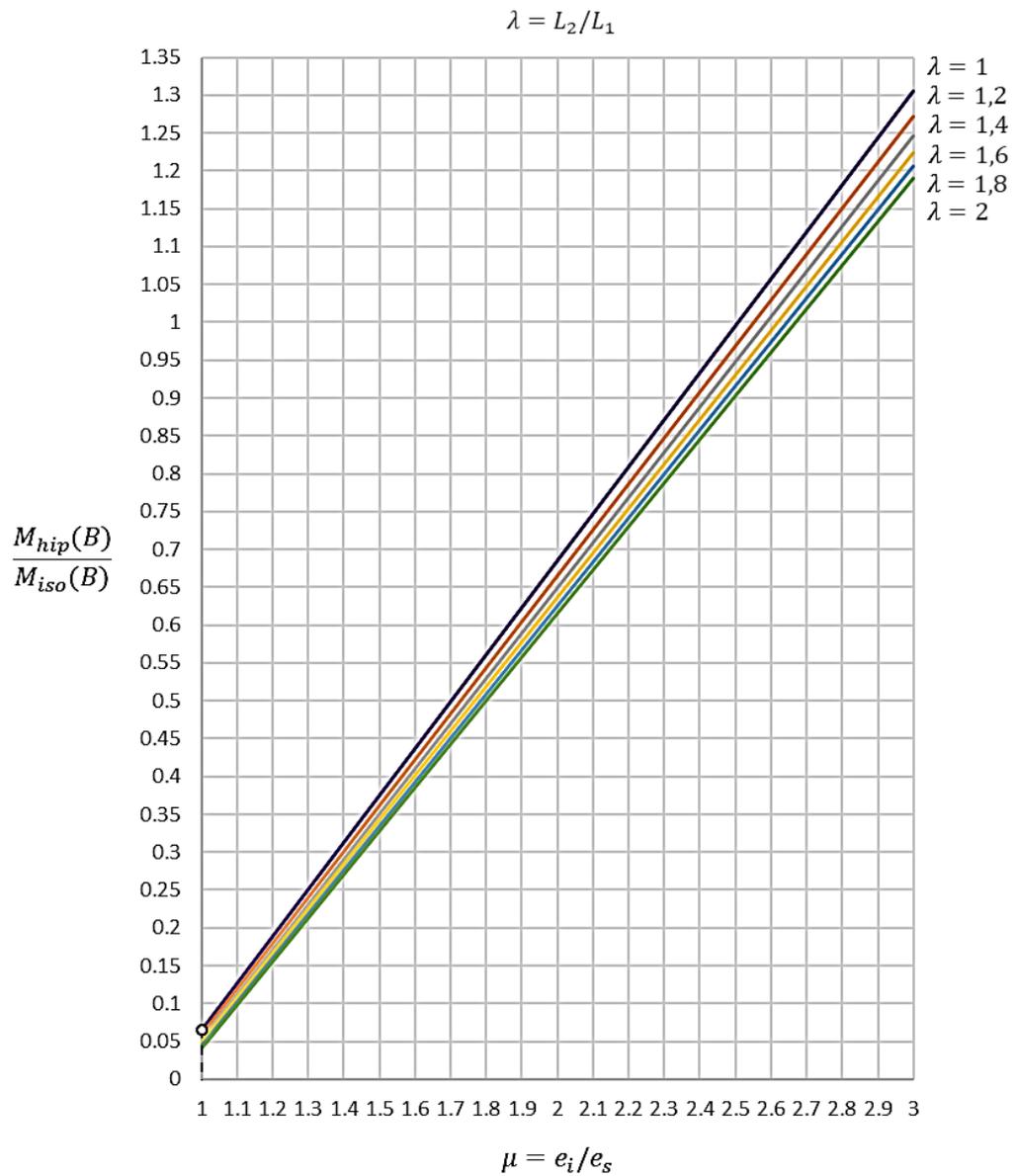


Figura 6-24 – Momento fletor hiperestático no apoio B .

Sendo, então, $M_{iso}(B) = 281,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$, como definido em (6-15), tem-se:

$$M_{hip}(B) = 281,4 \times 0,065 = 18,3 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (6-85)$$

6.2.3. Comparação de resultados

O Quadro 6-8 compara os resultados obtidos para o momento fletor hiperestático no apoio *B* da estrutura do exemplo, para o ajuste parabólico e em *splines* cúbicas. Observa-se que os resultados se mostram praticamente coincidentes para os diversos procedimentos utilizados em cada ajuste de traçado, validando-se, assim, as expressões e ábacos desenvolvidos neste trabalho.

Verifica-se, ainda a alta sensibilidade do momento fletor hiperestático a variações no traçado do cabo, uma vez que os resultados obtidos para cada ajuste apresentam diferença significativa. Na Figura 6-25, sobrepõem-se os ajustes por trechos de parábolas e *splines* cúbicas, com mesma escala vertical e horizontal.

Quadro 6-8 – Comparação de resultados obtidos para o momento hiperestático no apoio *B*.

Ajuste do traçado	Método de Cálculo	Mb (kN.m)
Parabólico	Carga Equivalente Convencional	77,8
	Linha de Influência (método simplificado)	75,0
Spline Cúbica	Método de ALVES	18,4
	Linha de Influência	18,3
	Ábaco	18,3

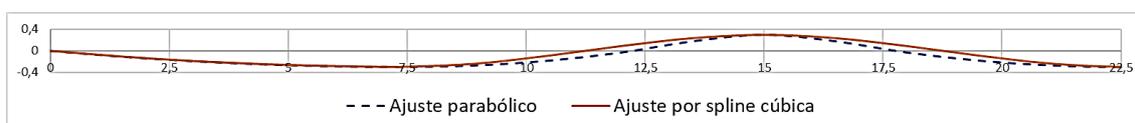


Figura 6-25 – Sobreposição dos ajustes para o traçado (mesma escala horizontal e vertical).

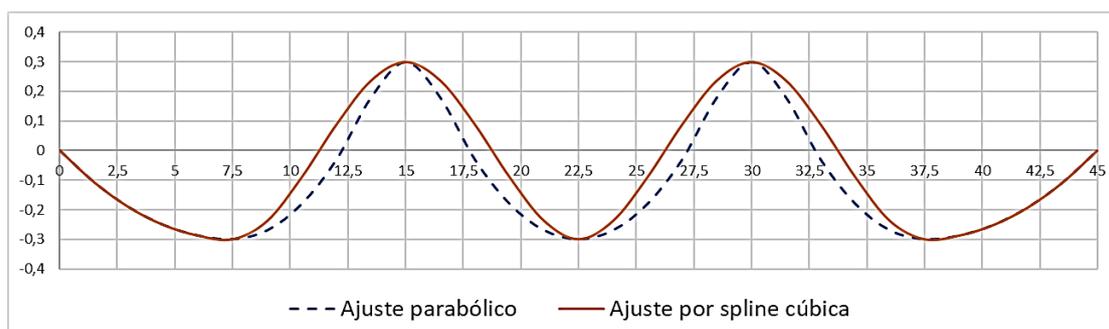


Figura 6-26 - Sobreposição dos ajustes para o traçado (escala vertical majorada).

6.3. Dois vãos protendidos (seção assimétrica)

6.3.1. Análise pelo Método de ALVES

A Figura 6-27 ilustra uma viga protendida com dois vãos para a qual se buscam determinar os momentos de protensão. As excentricidades máximas inferior e superior do cabo são diferentes, configuração típica de vigas de seção T ou I. Consideram-se a força de protensão $P = 1.000\text{kN}$ e o produto EI constantes ao longo da viga. São desprezadas as perdas de protensão.

O ajuste para o cabo da viga deste exemplo será realizado a partir das expressões deduzidas no Capítulo 5.5.1 para curvas *spline*. Para isso, se assume-se que o cabo apresenta tangente nula nos apoios da estrutura e nas seções A' e B' . Nestes pontos, a excentricidade do cabo é máxima.

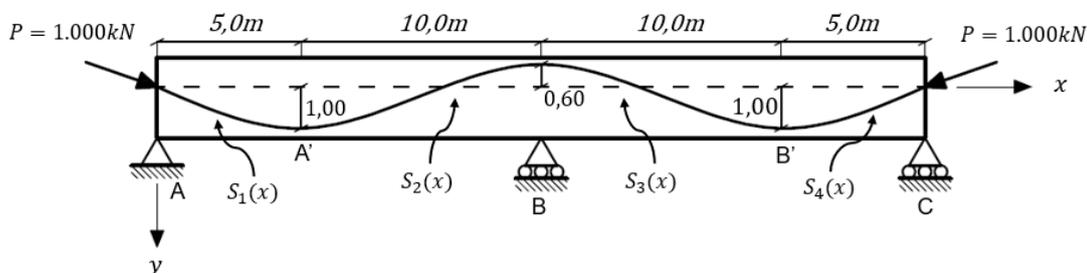


Figura 6-27 - Viga protendida de dois vãos.

A *spline* será, então, definida por quatro trechos de polinômios, como ilustrado na Figura 6-27. Sendo a tangente nos apoios A e C definida pela equação (5-107), têm-se os dados de entrada para ajuste das curvas *splines*. Supondo-se polinômios de terceiro grau para descrever o traçado do cabo, a *spline* ajustada em um trecho i é, então, definida pela equação (5-93). Onde os coeficientes da *spline* a_i, b_i, c_i e d_i são determinados a partir de (5-98), (5-99), (5-94) e (5-95), respectivamente.

A partir destas equações, programou-se, então, a planilha do Quadro 6-9, onde os dados de entrada são grifados em negrito.

Quadro 6-9 - Ajuste do traçado do cabo por *splines* cúbicas.

Seção	x (m)	y (m)	rad	t
A	0,0	0,00	0,346	0,360
A'	5,0	1,00	0,000	0,000
B	15,0	-0,60	0,000	0,000
B'	25,0	1,00	0,000	0,000
C	30,0	0,00	-0,346	-0,360

Trecho	xi (m)	xf (m)	Δx (m)	yi (m)	yf (m)	ti	tf	ai	bi	ci	di
AB	0,0	5,0	5,0	0,00	1,00	0,360	0,000	-1,60E-03	-2,40E-02	0,36	0,00
	5,0	15,0	10,0	1,00	-0,60	0,000	0,000	3,20E-03	-4,80E-02	0,00	1,00
BC	15,0	25,0	10,0	-0,60	1,00	0,000	0,000	-3,20E-03	4,80E-02	0,00	-0,60
	25,0	30,0	5,0	1,00	0,00	0,000	-0,360	1,60E-03	-4,80E-02	0,00	1,00

Aplicando-se, então, em (5-93), os coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i relacionados no Quadro 6-9, determinam-se as excentricidades do cabo para cada trecho de aplicação da carga equivalente. Adotam-se trechos de comprimento de $L = 2,50m$, dividindo-se cada vão da estrutura em seis segmentos. As tangentes dos ângulos de inclinação do cabo α são determinadas a partir da equação (6-53).

Determinam-se, então, as cargas equivalentes de protensão (Quadro 6-10) a partir das Equações (3-15), (3-18) e (3-19) combinadas a (2-2), (2-3) e (2-4), para cada seção de cálculo.

Quadro 6-10 – Cargas equivalentes de protensão.

Seção	x global (m)	P (kN)	α cab (grau)	e (m)	Trecho	L (m)	N1 (kN)	Q1 (kN)	M1 (kN.m)	N2 (kN)	Q2 (kN)	M2 (kN.m)	q1 (kN/m)	q2 (kN/m)	ρ (kN/m)
1 (A)	0,0	1000	-19,80	0,000											
					1	2,50	941	-339	0	979	-206	-710	25,20	81,36	15,11
2	2,5	1000	-11,86	-0,725											
					2	2,50	979	-206	-710	1000	0	-1000	49,95	114,45	8,54
3 (A')	5,0	1000	0,00	-1,000											
					3	2,50	1000	0	-1000	984	177	-738	109,72	31,94	-6,32
4	7,5	1000	10,20	-0,750											
					4	2,50	984	177	-738	972	233	-194	51,87	-6,78	-4,73
5	10,0	1000	13,50	-0,200											
					5	2,50	972	233	-194	984	177	344	2,24	-47,33	4,73
6	12,5	1000	10,20	0,350											
					6	2,50	984	177	344	1000	0	600	-38,01	-103,65	6,32
7 (B)	15,0	1000	0,00	0,600											
					7	2,50	1000	0	600	984	-177	344	-103,65	-38,01	-6,32
8	17,5	1000	-10,20	0,350											
					8	2,50	984	-177	344	972	-233	-194	-47,33	2,24	-4,73
9	20,0	1000	-13,50	-0,200											
					9	2,50	972	-233	-194	984	-177	-738	-6,78	51,87	4,73
10	22,5	1000	-10,20	-0,750											
					10	2,50	984	-177	-738	1000	0	-1000	31,94	109,72	6,32
11	25,0	1000	0,00	-1,000											
					11	2,50	1000	0	-1000	979	206	-710	114,45	49,95	-8,54
12	27,5	1000	11,86	-0,725											
					12	2,50	979	206	-710	941	339	0	81,36	25,20	-15,11
13 (C)	30,0	1000	19,80	0,000											

Aplicam-se, em seguida, as cargas equivalentes obtidas em seus respectivos trechos, obtendo-se o sistema estrutural da Figura 6-28, modelado pelo *Software* de análise estrutural Ftool.

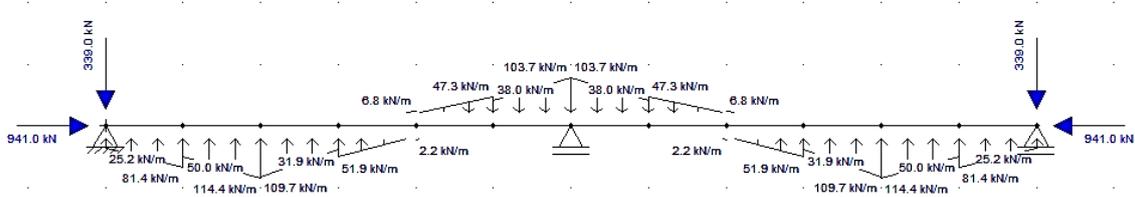


Figura 6-28- Modelo estrutural - Ftool.

Os resultados obtidos pelo programa para os momentos fletores de protensão são ilustrados na Figura 6-29.

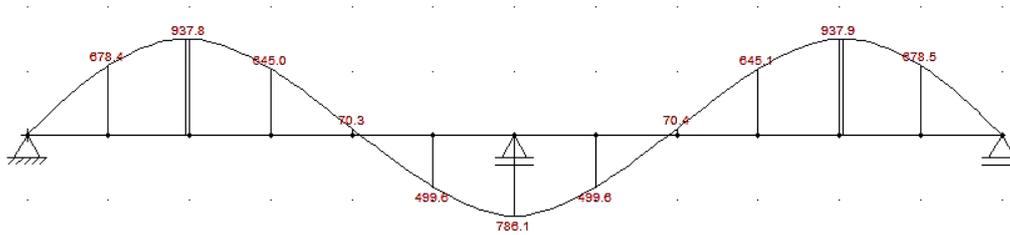


Figura 6-29 – Diagrama de momentos fletores totais ($kN \cdot m$).

Tem-se, assim, o momento fletor total no apoio B :

$$M_{tot}(B) = 786,1kN \cdot m \quad (6-86)$$

Sendo o momento fletor isostático em B dado por (6-15), pode-se determinar, por (2-7), o momento fletor hiperestático:

$$M_{hip}(B) = 786,1 - 600 = 186,1kN \cdot m \quad (6-87)$$

6.3.2. Análise por linha de influência

Como descrito no Capítulo 5, o momento hiperestático no apoio B da viga deste exemplo pode ser definido pela equação (5-112), onde $|\theta_B|$ é dado pela equação (5-15) e os valores de $m(x)$ nas extremidades de cada trecho (g_i e g_j) são obtidos a partir de (5-12) e (5-18), substituindo-se os respectivos valores de x_i e x_j . O somatório da equação (5-112) é realizado para os $n - 1 = 4$ trechos de *spline*, ilustrados na Figura 6-27.

Têm-se, assim, definidos todos os parâmetros para a solução do somatório da expressão (5-112). A partir destas equações, programou-se a planilha ilustrada no Quadro 6-11, onde os dados de entrada são grifados negrito.

Quadro 6-11 – Determinação do momento hiperestático de protensão no apoio B .

Seção	x (m)	y (m)	rad	t
A	0,0	0,00	0,346	0,360
A'	5,0	1,00	0,000	0,000
B	15,0	-0,60	0,000	0,000
B'	25,0	1,00	0,000	0,000
C	30,0	0,00	-0,346	-0,360

L1 (m)	15
L2 (m)	15
P (kN)	1.000
$ \theta EI$	10

Trecho	xi (m)	xf (m)	Δx (m)	yi (m)	yf (m)	ti	tf	gi	gj	Σ
AB	0,0	5,0	5,0	0,00	1,00	0,360	0,000	0,00	-0,33	-41,00
	5,0	15,0	10,0	1,00	-0,60	0,000	0,000	-0,33	-1,00	-16,00
BC	15,0	25,0	10,0	-0,60	1,00	0,000	0,000	-1,00	-0,33	-16,00
	25,0	30,0	5,0	1,00	0,00	0,000	-0,360	-0,33	0,00	-41,00
										-114,00

Mb (kN.m)	190,00
-----------	--------

Tem-se, portanto o momento fletor hiperestático de protensão no apoio B :

$$M_{hip}(B) = 190,0kN \cdot m \quad (6-88)$$

Observa-se que este resultado é coerente o que se obtém a partir da equação (5-175), aplicando-se $\mu = 5/3$:

$$\frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{121\mu - 144}{180} = 0,320 \quad (6-89)$$

O ábaco da Figura 5-37 fornece este mesmo resultado, como se verifica a seguir.

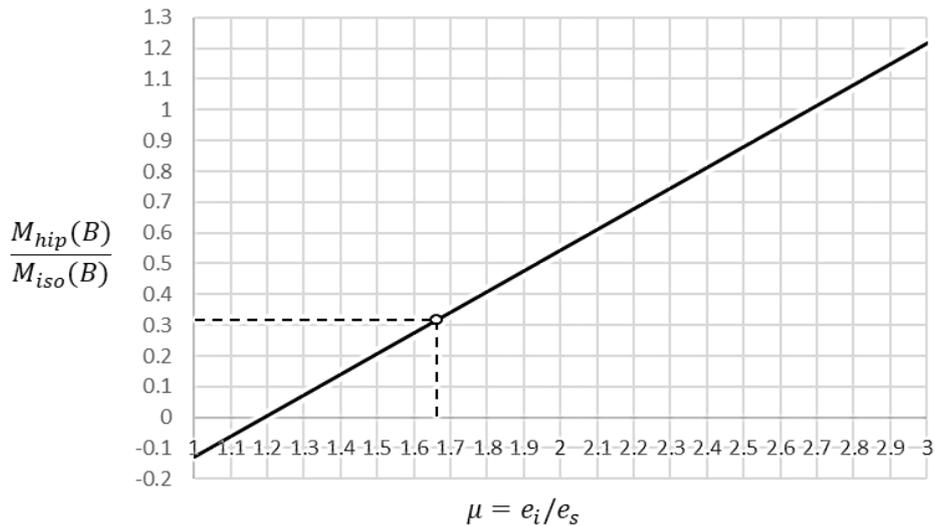


Figura 6-30 – Momento fletor hiperestático no apoio B .

Sendo, então, $M_{iso}(B) = 600\text{kN} \cdot \text{m}$, tem-se:

$$M_{hip}(B) = 600 \times 0,320 = 192,0\text{kN} \cdot \text{m} \quad (6-90)$$

6.3.3. Comparação de resultados

O Quadro 6-12 compara os resultados obtidos para o momento fletor hiperestático no apoio B da estrutura do exemplo para o ajuste em *splines* cúbicas. Observa-se que os resultados se mostram praticamente coincidentes para os procedimentos utilizados em cada ajuste de traçado, validando-se, assim, as expressões e ábacos desenvolvidos neste trabalho.

Quadro 6-12– Comparação de resultados obtidos para o momento hiperestático no apoio B .

Ajuste do traçado	Método de Cálculo	Mb (kN.m)
Spline Cúbica	Método de ALVES	186,1
	Linha de Influência	190,0
	Ábaco	192,0

6.4. Três vãos protendidos (seção assimétrica)

6.4.1. Análise pelo Método de ALVES

A Figura 6-31 ilustra uma viga protendida com três vãos para a qual se buscam determinar os momentos de protensão. As excentricidades máximas inferior e superior do cabo são diferentes, configuração típica de vigas de seção T ou I. Consideram-se a força de protensão $P = 1.000\text{kN}$ e o produto EI constantes ao longo da viga. São desprezadas as perdas de protensão.

O ajuste para o cabo da viga deste exemplo é realizado a partir das expressões deduzidas no Capítulo 5.5.1 para curvas *spline*. Para isso, se assume-se que o cabo apresenta tangente nula nos apoios da estrutura e nas seções A' , B' e C' . Nestes pontos, a excentricidade do cabo é máxima.

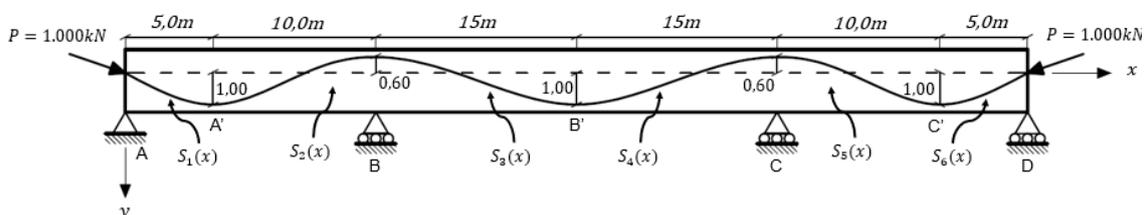


Figura 6-31 – Trechos para ajuste do traçado do cabo em *splines*.

A *spline* será, então, definida por quatro trechos de polinômios, como ilustrado na Figura 6-31. Sendo a tangente nos apoios A e D é definida pela equação (5-107), têm-se todos os dados de entrada para ajuste das curvas *splines*. Supõem-se polinômios de terceiro grau para descrever o traçado do cabo, a *spline* ajustada em um trecho i é, então, definida pela equação (5-93). Onde os coeficientes da *spline* a_i , b_i , c_i e d_i são determinados a partir de (5-98), (5-99), (5-94) e (5-95), respectivamente.

A partir destas equações, programou-se, então, a planilha do Quadro 6-13, onde os dados de entrada são grifados em negrito.

Quadro 6-13 - Ajuste do traçado do cabo por *splines* cúbicas.

Seção	x (m)	y (m)	rad	t
A	0,0	0,00	0,346	0,360
A'	5,0	1,00	0,000	0,000
B	15,0	-0,60	0,000	0,000
B'	30,0	1,00	0,000	0,000
C	45,0	-0,60	0,000	0,000
C'	55,0	1,00	0,000	0,000
D	60,0	0,00	-0,346	-0,360

Trecho	xi (m)	xf (m)	Δx (m)	yi (m)	yf (m)	ti	tf	ai	bi	ci	di
AB	0,0	5,0	5,0	0,00	1,00	0,360	0,000	-1,60E-03	-2,40E-02	0,36	0,00
	5,0	15,0	10,0	1,00	-0,60	0,000	0,000	3,20E-03	-4,80E-02	0,00	1,00
BC	15,0	30,0	15,0	-0,60	1,00	0,000	0,000	-9,48E-04	2,13E-02	0,00	-0,60
	30,0	45,0	15,0	1,00	-0,60	0,000	0,000	9,48E-04	-2,13E-02	0,00	1,00
CD	45,0	55,0	10,0	-0,60	1,00	0,000	0,000	-3,20E-03	4,80E-02	0,00	-0,60
	55,0	60,0	5,0	1,00	0,00	0,000	-0,360	1,60E-03	-4,80E-02	0,00	1,00

Aplicando-se, então, em (5-93), os coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i relacionados no Quadro 6-5, determinam-se as excentricidades do cabo para cada trecho de aplicação da carga equivalente. Adotam-se trechos de comprimento de $L = 2,50m$.

Determinam-se, então, as cargas equivalentes de protensão (Quadro 6-14) a partir das equações (3-15), (3-18) e (3-19) combinadas a (2-2), (2-3) e (2-4), para cada seção de cálculo.

Quadro 6-14 - Cargas equivalentes de protensão.

Seção	x global (m)	P (kN)	α cab (grau)	e (m)	Trecho	L (m)	N1 (kN)	Q1 (kN)	M1 (kN.m)	N2 (kN)	Q2 (kN)	M2 (kN.m)	q1 (kN/m)	q2 (kN/m)	p (kN/m)
1 (A)	0,0	1000	-19,80	0,000											
					1	2,50	941	-339	0	979	-206	-710	25,20	81,36	15,11
2	2,5	1000	-11,86	-0,725											
					2	2,50	979	-206	-710	1000	0	-1000	49,95	114,45	8,54
3 (A')	5,0	1000	0,00	-1,000											
					3	2,50	1000	0	-1000	984	177	-738	109,72	31,94	-6,32
4	7,5	1000	10,20	-0,750											
					4	2,50	984	177	-738	972	233	-194	51,87	-6,78	-4,73
5	10,0	1000	13,50	-0,200											
					5	2,50	972	233	-194	984	177	344	2,24	-47,33	4,73
6	12,5	1000	10,20	0,350											
					6	2,50	984	177	344	1000	0	600	-38,01	-103,65	6,32
7 (B)	15,0	1000	0,00	0,600											
					7	2,50	1000	0	600	996	-89	479	-45,22	-25,61	-1,57
8	17,5	1000	-5,08	0,481											
					8	2,50	996	-89	479	990	-141	183	-29,87	-11,87	-2,41
9	20,0	1000	-8,09	0,185											
					9	2,50	990	-141	183	987	-158	-197	-13,89	0,09	-1,04
10	22,5	1000	-9,09	-0,200											
					10	2,50	987	-158	-197	990	-141	-579	-1,09	14,89	1,04
11	25,0	1000	-8,09	-0,585											
					11	2,50	990	-141	-579	996	-89	-878	9,55	32,19	2,41
12	27,5	1000	-5,08	-0,881											
					12	2,50	996	-89	-878	1000	0	-1000	24,10	46,73	1,57
13 (B')	30,0	1000	0,00	-1,000											
					13	2,50	1000	0	-1000	996	89	-878	46,73	24,10	-1,57
14	32,5	1000	5,08	-0,881											
					14	2,50	996	89	-878	990	141	-579	32,19	9,55	-2,41
15	35,0	1000	8,09	-0,585											
					15	2,50	990	141	-579	987	158	-197	14,89	-1,09	-1,04
16	37,5	1000	9,09	-0,200											
					16	2,50	987	158	-197	990	141	183	0,09	-13,89	1,04
17	40,0	1000	8,09	0,185											
					17	2,50	990	141	183	996	89	479	-11,87	-29,87	2,41
18	42,5	1000	5,08	0,481											
					18	2,50	996	89	479	1000	0	600	-25,61	-45,22	1,57
19 (C)	45,0	1000	0,00	0,600											
					19	2,50	1000	0	600	984	-177	344	-103,65	-38,01	-6,32
20	47,5	1000	-10,20	0,350											
					20	2,50	984	-177	344	972	-233	-194	-47,33	2,24	-4,73
21	50,0	1000	-13,50	-0,200											
					21	2,50	972	-233	-194	984	-177	-738	-6,78	51,87	4,73
22	52,5	1000	-10,20	-0,750											
					22	2,50	984	-177	-738	1000	0	-1000	31,94	109,72	6,32
23 (C')	55,0	1000	0,00	-1,000											
					23	2,50	1000	0	-1000	979	206	-710	114,45	49,95	-8,54
24	57,5	1000	11,86	-0,725											
					24	2,50	979	206	-710	941	339	0	81,36	25,20	-15,11
25 (D)	60,0	1000	19,80	0,000											

Aplicam-se, em seguida, as cargas equivalentes obtidas em seus respectivos trechos, obtendo-se o sistema estrutural da Figura 6-32, modelado pelo *Software* de Ftool.

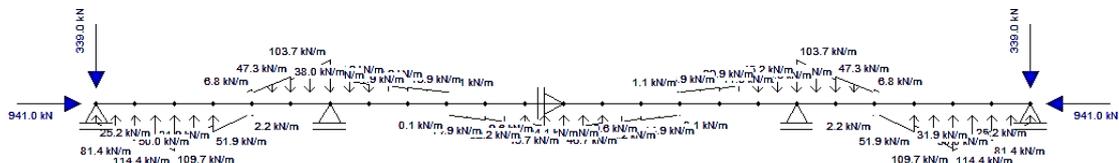


Figura 6-32- Modelo estrutural - Ftool.

Os resultados obtidos pelo programa para os momentos fletores de protensão são ilustrados na Figura 6-33.

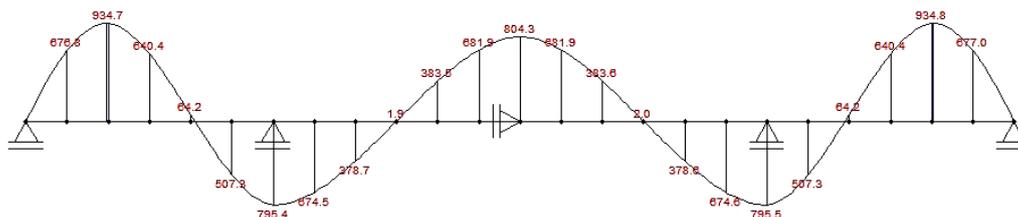


Figura 6-33– Diagrama de momentos fletores totais ($kN \cdot m$).

Tem-se, assim, o momento fletor total no apoio B :

$$M(B) = 795,5kN \cdot m \quad (6-91)$$

Desta forma, sendo o momento fletor isostático em B dado por:

$$M_{iso}(B) = 1.000 \times 0,60 = 600kN \cdot m \quad (6-92)$$

pode-se determinar, por (2-7), o momento fletor hiperestático de protensão:

$$M_{hip}(B) = 795,5 - 600 = 195,5kN \cdot m \quad (6-93)$$

6.4.2. Análise por linha de influência

Como descrito no Capítulo 5, o momento hiperestático no apoio B da viga deste exemplo pode ser definido pela equação (5-112), onde $|\theta_B|$ é dado pela equação (5-78) e os valores de $m(x)$ nas extremidades de cada trecho (g_i e g_j) são obtidos a partir de (5-12), (5-73) e (5-74), substituindo-se os respectivos valores de x_i e x_j . O somatório da equação (5-112), é realizado para os $n - 1 = 6$ trechos de *spline*, ilustrados na Figura 6-31.

Têm-se, assim, definidos todos os parâmetros para a solução do somatório da expressão (5-112), A partir destas equações, programou-se a planilha ilustrada no Quadro 6-15, onde os dados de entrada estão grifados negrito.

Quadro 6-15 - Momento fletor hiperestático de protensão no apoio *B*.

Seção	x (m)	y (m)	rad	t
A	0,0	0,00	0,346	0,360
A'	5,0	1,00	0,000	0,000
B	15,0	-0,60	0,000	0,000
B'	30,0	1,00	0,000	0,000
C	45,0	-0,60	0,000	0,000
C'	55,0	1,00	0,000	0,000
D	60,0	0,00	-0,346	-0,360

L1 (m)	15
L2 (m)	30
P (kN)	1.000
$ \theta EI$	13,33
Mc	0,33

Trecho	xi (m)	xf (m)	Δx (m)	yi (m)	yf (m)	ti	tf	gi	gj	Σ
AB	0,0	5,0	5,0	0,00	1,00	0,360	0,000	0,00	-0,33	-41,00
	5,0	15,0	10,0	1,00	-0,60	0,000	0,000	-0,33	-1,00	-16,00
BC	15,0	30,0	15,0	-0,60	1,00	0,000	0,000	-1,00	-0,33	-24,00
	30,0	45,0	15,0	1,00	-0,60	0,000	0,000	-0,33	0,33	-96,00
CD	45,0	55,0	10,0	-0,60	1,00	0,000	0,000	0,33	0,11	5,33
	55,0	60,0	5,0	1,00	0,00	0,000	-0,360	0,11	0,00	13,67
										-158,00

Mb (kN.m)	197,50
-----------	--------

Tem-se, portanto o momento fletor hiperestático de protensão no apoio *B*:

$$M_{hip}(B) = 197,5kN \cdot m \quad (6-94)$$

Observa-se que este resultado é coerente o que se obtém a partir da equação (5-231), deduzida no item 5.5.2.2, aplicando-se $\mu = 5/3$ e $\lambda = 2$:

$$\frac{M_{hip}(B)}{M_{iso}(B)} = \frac{135\lambda(\mu - 1) + 121\mu - 144}{90(3\lambda + 2)} = 0,330 \quad (6-95)$$

O ábaco da Figura 5-44 fornece este mesmo resultado, como se verifica a seguir.

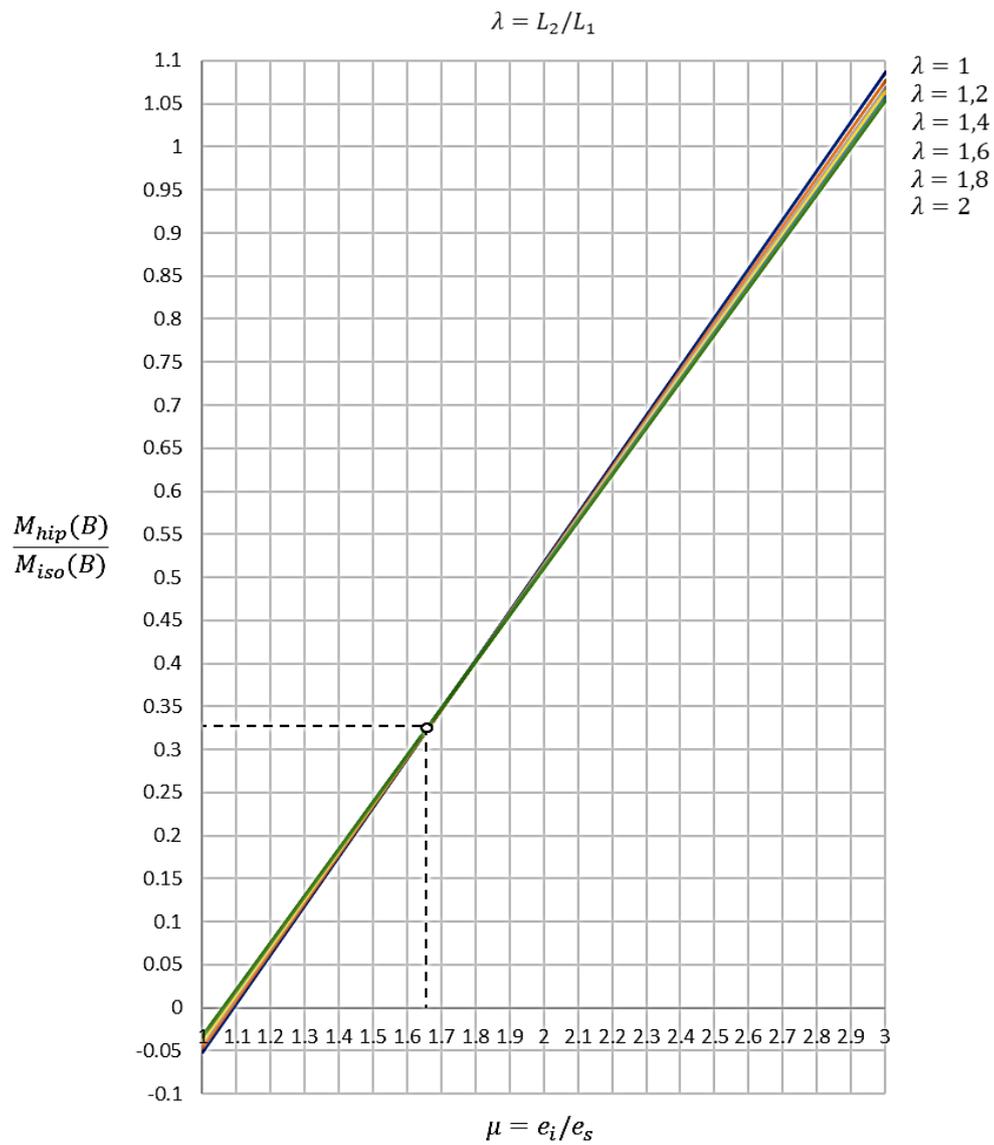


Figura 6-34– Momento fletor hiperestático de protensão no apoio B .

Sendo, então, o momento fletor isostático $M_{iso}(B) = 600kNm$, tem-se:

$$M_{hip}(B) = 600 \times 0,330 = 198,0kN \cdot m \quad (6-96)$$

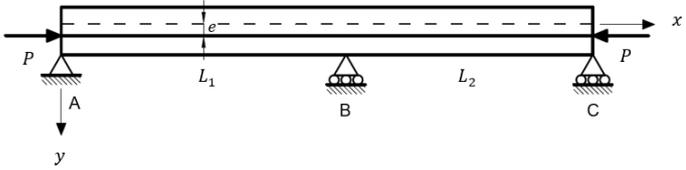
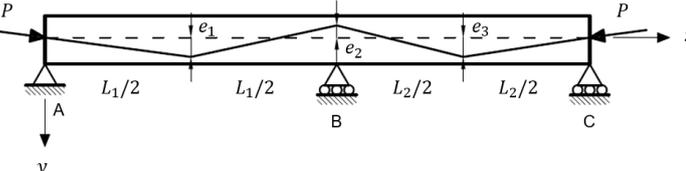
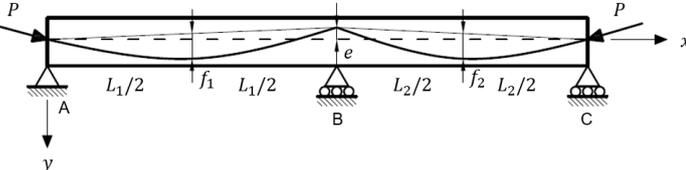
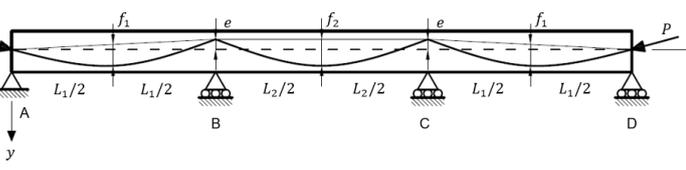
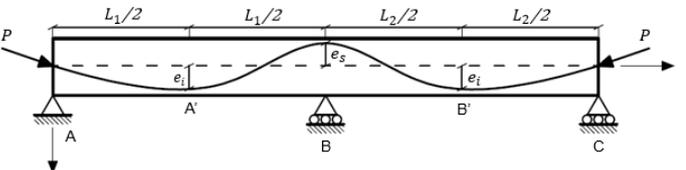
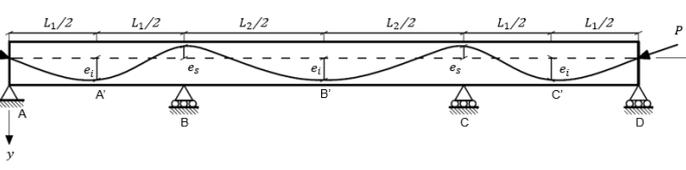
6.4.3. Comparação de resultados

O Quadro 6-16 compara os resultados obtidos para o momento fletor hiperestático no apoio *B* da estrutura do exemplo para o ajuste em *splines* cúbicas. Observa-se que os resultados se mostram praticamente coincidentes para os procedimentos utilizados em cada ajuste de traçado, validando-se, assim, as expressões e ábacos desenvolvidos neste trabalho.

Quadro 6-16– Comparação de resultados obtidos para o momento hiperestático no apoio *B*.

Ajuste do traçado	Método de Cálculo	Mb (kN.m)
Spline Cúbica	Método de ALVES	195,5
	Linha de Influência	197,5
	Ábaco	198,0

7. Quadro resumo

Viga protendida	$M_{hip}(B)$
	$\frac{3 P \cdot e}{2}$
	$\frac{P}{8} \left[\frac{6(e_1 L_1 + e_3 L_2)}{L_1 + L_2} - 5e_2 \right]$
	$P \left(\frac{L_1 f_1 + L_2 f_2}{L_1 + L_2} - e \right)$
	$P \left(\frac{L_1 f_1 + L_2 f_2}{L_1 + \frac{3}{2} L_2} - e \right)$
	<p style="text-align: center;">Figura 7-1</p>
	

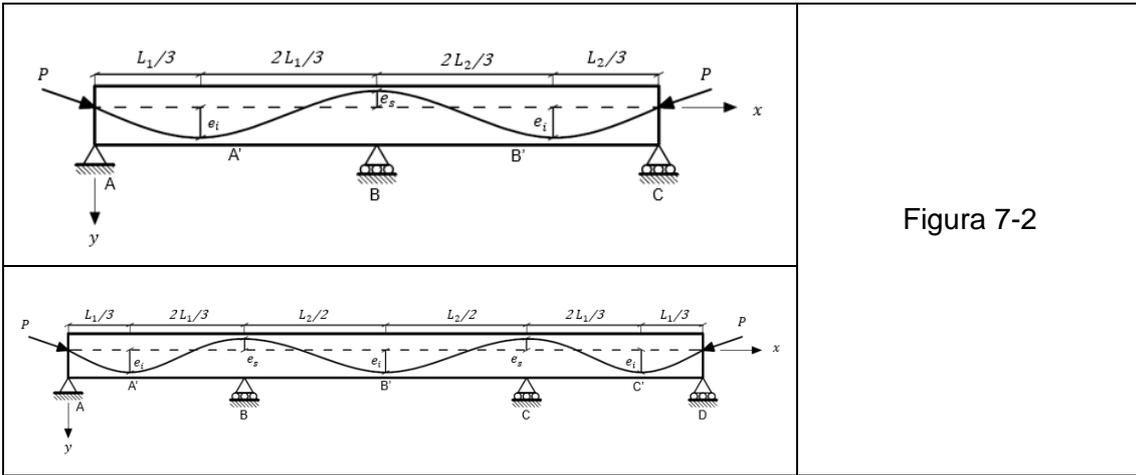


Figura 7-2

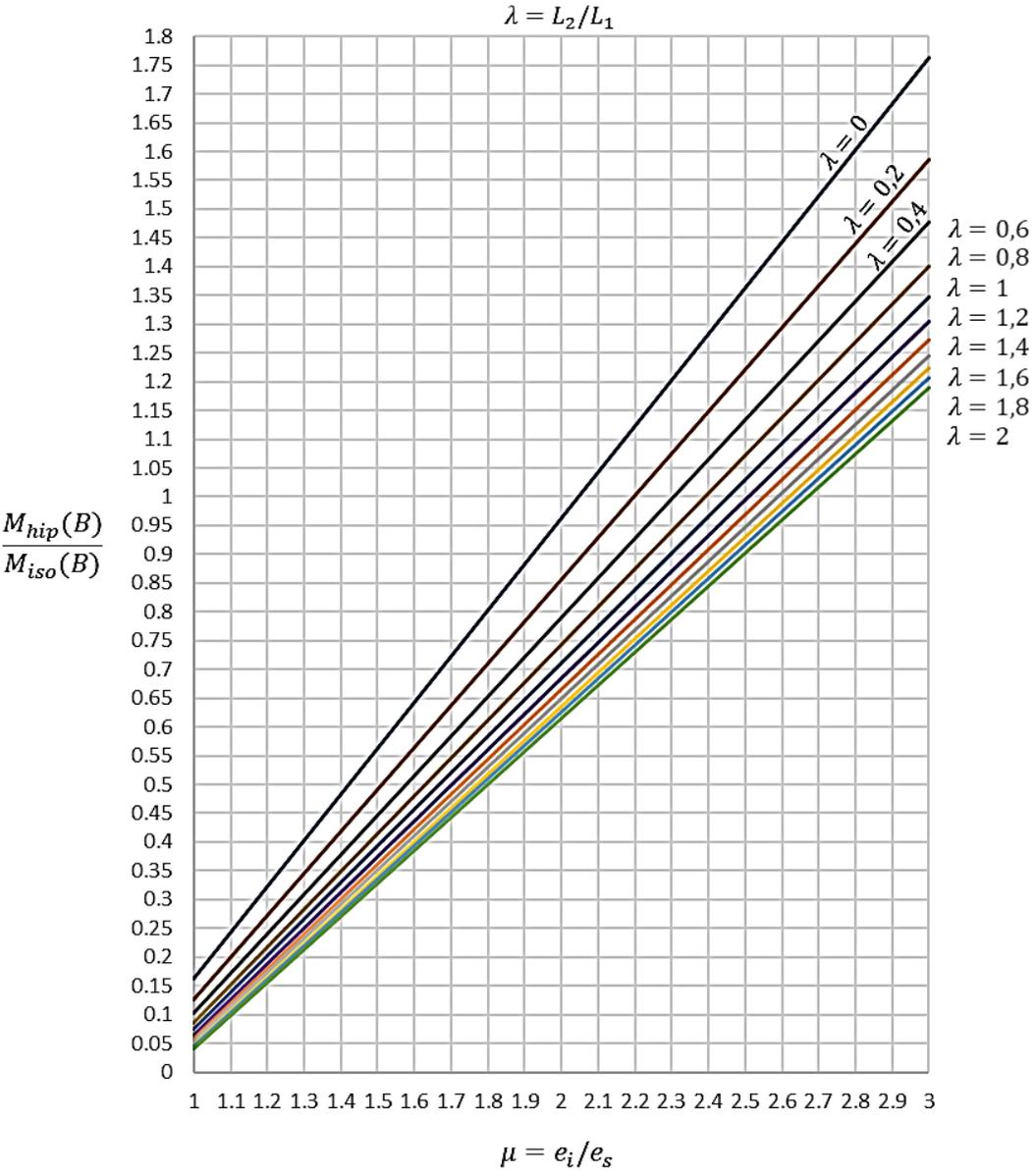


Figura 7-1– Momento fletor hiperestático no apoio interno de uma viga protendida.

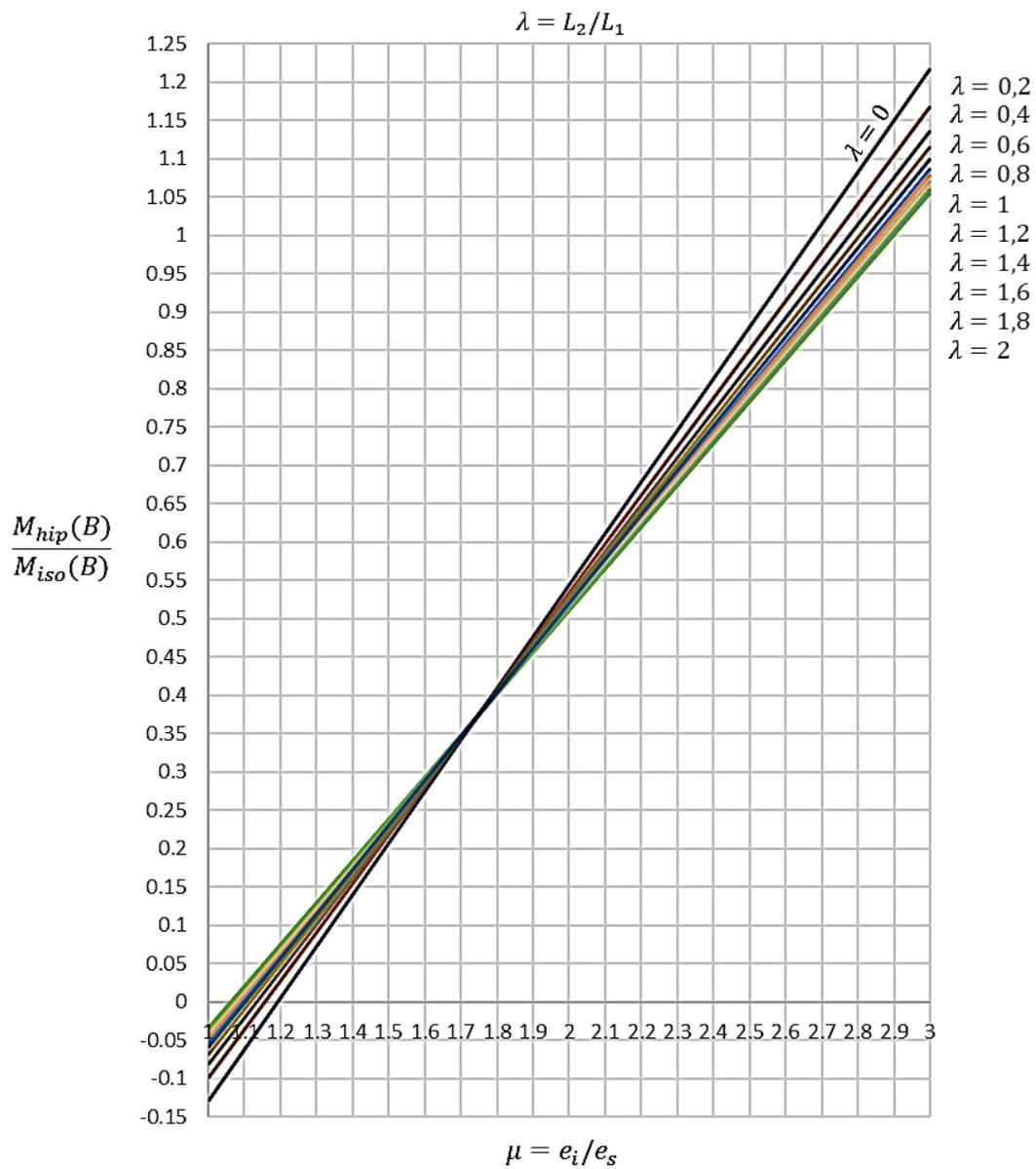


Figura 7-2– Momento fletor hiperestático no apoio interno de uma viga protendida.

8. Conclusões e sugestões de continuidade

Este trabalho aplica os conceitos de linhas de influência para o desenvolvimento de expressões analíticas e ábacos capazes de fornecer uma avaliação preliminar prática dos momentos fletores hiperestáticos de protensão, em vigas de dois e três vãos.

A partir das análises dos exemplos numéricos realizada nos itens 6.1.3, 6.2.3, 6.3.3 e 6.4.3, observa-se que os resultados obtidos para o momento hiperestático de protensão pelos métodos propostos se mostram muito próximos a procedimentos de cálculo convencionais para análise de protensão. Validam-se, assim, as expressões e os ábacos desenvolvidos neste trabalho.

Verifica-se, ainda, a elevada sensibilidade do momento hiperestático de protensão a variações sutis do traçado, ressaltando-se a importância da adoção de ajustes para o traçado que representem, de fato, a realidade. Comparam-se resultados para o momento fletor hiperestático de protensão assumindo-se ajustes por polinômios do 2º e do 3º grau, obtendo-se diferenças expressivas. Este resultado é inesperado e, no mínimo surpreendente, já que não se encontra menção a este aspecto nas principais bibliografias para assunto.

Pode-se dizer que as expressões analíticas e os ábacos desenvolvidos permitem prontamente a determinação, com excelente precisão, do momento hiperestático de protensão de uma viga de dois ou três vãos com traçado descrito por *splines* cúbicas. Ressalta-se, contudo, que a validade dos resultados obtidos está diretamente vinculada à proximidade do traçado do cabo com o ajuste adotado. Qualquer pequena alteração do traçado pode resultar em variações expressivas do resultado.

As expressões simplificadas para os ajustes parabólicos se mostram igualmente válidas, desde que o traçado seja, de fato, parabólico. Nota-se, neste caso a mesma sensibilidade a variações de pequena magnitude no traçado

Por fim, destacam-se alguns aspectos para possível continuidade e aprofundamento deste trabalho:

- Expansão do procedimento de cálculo para estruturas com seções de momento de inércia variável ao longo de seu comprimento (Figura 8-1);
- Expansão do procedimento de cálculo para estruturas com variação da cota do centroide (greide em elevação) (Figura 8-1);

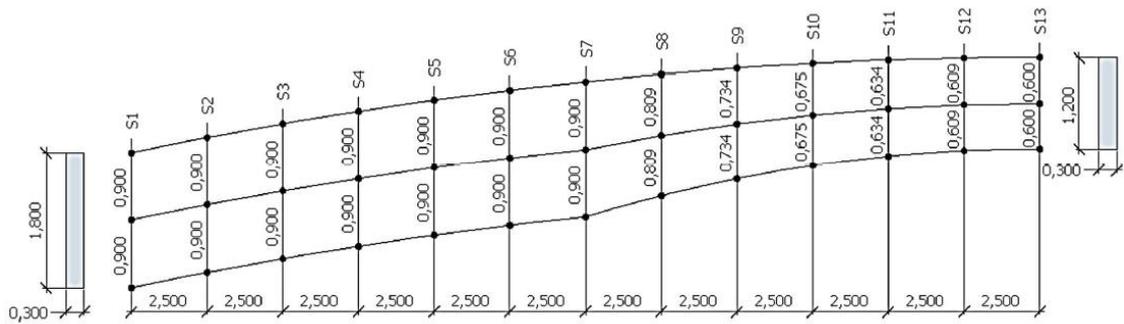


Figura 8-1 – Viga protendida com variação de momento de inércia e greide em elevação.

Fonte: (ALVES, 2017).

- Abordagem de perdas de protensão das formulações (Figura 8-2);

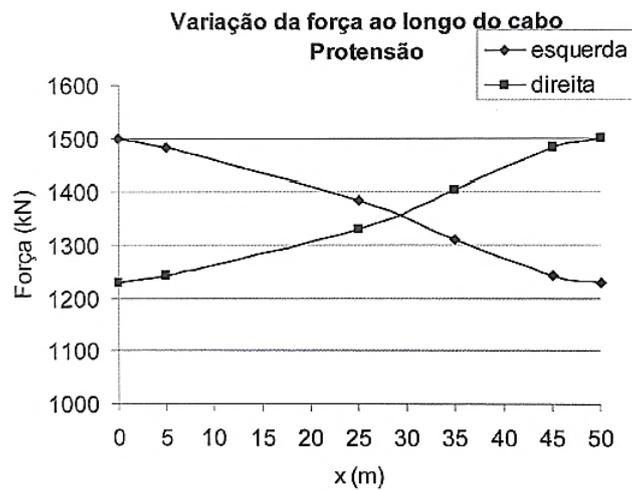


Figura 8-2 – Força ao longo do cabo de protensão, considerando protensão apenas à esquerda e protensão apenas à direita. Fonte: (CARVALHO, 2012, p. 135)

- Generalização da localização da seção de excentricidade máxima nos vãos externos da estrutura (Figura 8-3);

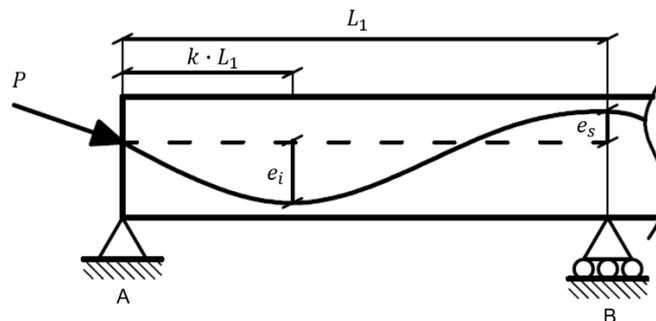


Figura 8-3 – Generalização do ponto de excentricidade máxima do traçado no vão externo

- Desenvolvimento de expressões para vigas de três vãos assimétricas;
- Aprofundamento do estudo da sensibilidade do valor do momento fletor hiperestático a mudanças de traçado, verificando-se o limite de validade dos ábacos desenvolvidos neste trabalho;
- Estudo de vigas com quatro vãos.

9. Bibliografia

ALVES, E. V. **Análise Estrutural de Pontes em vigas Múltiplas de Concreto Protendido**. Rio de Janeiro: COPPE/ UFRJ, 1994.

ALVES, R. V. **Projeto de Estruturas Protendidas**. Notas para Aula. ed. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, 2017.

CARVALHO, R. C. **Estruturas em Concreto Protendido**. 1ª. ed. São Paulo: PINI, 2012.

GHALI, A. Bending Moments in Prestressed Concrete Structures by Prestressing Moment Influence Coefficients. **Proc. ACI**, v. 66, p. 494-497, Junho 1969.

GHALI, A.; NEVILLE, A. M. **Structural Analysis - A unified classical and matrix approach**. Pennsylvania: IEP, 1972.

KONG, J. A practical method for the calculation of secondary prestress moments. **The Hong Kong Institution of Engineers**, Hong Kong, v. 11, p. 49-52, Dez. 2004. ISSN 4.

LEONHARDT, F. **Construções de Concreto**. Tradução de João Luís Escosteguy Merino. Rio de Janeiro: Interciência, v. 5: Concreto Protendido, 1983.

LIN, T. Y. Load-Balancing Method for Design of Prestressed Concrete Structures. **AIC Journal**, Jun 1980. 719-742.

PERLINGEIRO, M. **Análise Tridimensional de Estruturas Protendidas**. Niterói: Universidade Federal Fluminense - UFF, 1998.

PFEIL, W. **Concreto Protendido**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, v. 1, 1984.

RAMALHO, J. **Aplicações de Métodos de Energia e Problemas de Instabilidade de Estruturas**. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC - RIO, 2013.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural**. 7ª. ed. Rio de Janeiro: Globo, v. 2 Deformações em Estruturas. Método das Forças, 1984.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural**. 7ª. ed. Rio de Janeiro: Globo, v. 3 Método das Deformações. Processo de Cross, 1987.

THOMAZ, E. C. S. **Concreto Protendido - Noções Básicas**. Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia - IME, v. 18: Hiperestático de Protensão, 2009.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. **Mecânica dos Sólidos**. Tradução de José Rodrigues de Carvalho. Rio de Janeiro: LTC, v. 1, 1983.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. **Mecânica dos Sólidos**. Tradução de José Rodrigues de Carvalho. Rio de Janeiro: LTC, v. 2, 1984.

VERÍSSIMO, G. D. S.; CÉSAR JR, K. M. L. **Concreto Protendido - Fundamentos Básicos**. 4ª. ed. Viçosa: Universidade Federal de Viçosa - UFV, 1998.